

Tercera parte

Validez de las reglas empíricas

8. VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS TRADICIONALES

8.1. Introducción: Galileo y el Principio de Semejanza

El trabajo de investigación realizado en la Segunda Parte de esta Tesis ha puesto de manifiesto que los arquitectos, constructores e ingenieros, en los siglos XV al XVIII, empleaban reglas estructurales para determinar las dimensiones de los elementos estructurales fundamentales en sus estructuras abovedadas de fábrica.

La gran mayoría de estas fórmulas son "proporcionales", es decir, producen formas "semejantes" en sentido geométrico; dan, por ejemplo, el espesor de un contrafuerte para un arco dependiendo de su curva intradós pero independientemente de su tamaño. En otras palabras, ellos creían implícitamente en la existencia de una "ley de semejanza": una forma estructural válida es correcta independientemente de su tamaño.

Sin embargo, Galileo demostró la imposibilidad de la existencia de un principio de este tipo¹. Su razonamiento es brillante y claro: en las estructuras que soportan como carga principal su propio peso, como por ejemplo los animales y los edificios de fábrica, la carga muerta crece como el cubo de las dimensiones lineales mientras que la sección de las partes de la estructura crece como el cuadrado, por ello, las tensiones crecen linealmente con el tamaño² y los elementos estructurales deben hacerse, en proporción, más gruesos. La figura 8.1 (a) muestra la ilustración de Galileo sobre el efecto

1. Galileo Galilei *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. Leiden: 1688. pp. 233 y ss. Hemos manejado la traducción española de C. Solís y J. Sádaba, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Madrid: Editora Nacional, 1976

2. "De lo que se ha demostrado hasta el momento, como podéis ver, se infiere la imposibilidad de poder, no sólo en el arte sino en la misma naturaleza, aumentar los mecanismos hasta dimensiones inmensas, de modo que sería imposible fabricar naves, palacios o templos enormes...". Galileo, op. cit., pág. 169.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

de los cambios de tamaño sobre el hueso de un animal³.

El razonamiento de Galileo ha alcanzado el rango de ley, la ley del "cubo-cuadrado" en el diseño de estructuras. Dicha ley ha determinado la actitud de los ingenieros y los arquitectos sobre los efectos de los cambios de escala en el diseño de estructuras, y la de los historiadores de la construcción y de la ingeniería civil hacia las reglas proporcionales tradicionales⁴.

A pesar de la veracidad de las afirmaciones básicas de Galileo, las estructuras de obra tradicionales parecen ser muy semejantes, independientemente de su tamaño. En la figura (8.1.b) hemos aplicado la ley del cubo-cuadrado de Galileo a un tipo de cúpula muy popular en el renacimiento italiano⁵, de la misma manera que lo hizo Galileo con los huesos de animales. La cúpula tiene un diámetro interior de 14 metros; si multiplicamos este diámetro por tres obtendríamos una cúpula con un diámetro de 42 m. Hemos dibujado a escala esta cúpula con las dimensiones que resultan con la ley de Galileo.

En la Figura 8.2 comparamos las proporciones de una cúpula obtenidas por la ley de semejanza, (b), con la cúpula obtenida aplicando la ley cubo-cuadrado, (a), y con dos cúpulas que tienen 42 m (es decir que triplican casi

3. "Para poner un breve ..., dibujemos la figura de un hueso alargado solamente tres veces más de lo que era, pero habiendo aumentado su grosor en tal proporción que pudiese realizar en el animal grande la función que correspondería al hueso más pequeño también en el animal más pequeño. Por las figuras podéis ver qué desproporcionada es la figura del hueso agrandado. De aquí se deduce que quien quisiera mantener, en su inmenso gigante, las proporciones que se dan entre los miembros de un hombre normal, tendría o bien que encontrar un material mucho más duro y resistente para formar así los huesos, o bien que admitir una disminución de su potencia en relación con la de los hombres de estatura normal; de otro modo, si su altura creciese de manera desmesurada, acabaría derrumbándose bajo su propio peso." Galileo, op. cit., págs. 169-170.

4. La actitud general señala la imposibilidad de deducir reglas válidas debido a la ignorancia de las leyes de la estática. Véase, por ejemplo: W. P. Parsons *Engineers and Engineering in the Renaissance*, Cambridge, The MIT Press, 1965 (reprint of 1939 edition), pp. 481; R. J. Mainstone *Developments on Structural Form*, Harmondsworth, Penguin, 1983, pp. 284; H. I. Dorn "The Art of Building and the Science of Mechanics: An Study of the Union of Theory and Practice in the Early History of Structural Analysis in England." Ph.D. Princeton University, 1970, pag. 50-51; E. Benvenuto *La Scienze della Costruzione ed il suo sviluppo storico*. Firenze, Sansoni, 1982, pp. 234-235.

5. La sección corresponde a la iglesia Saint Viagio en Monte Pulciano, Italia.

exactamente el tamaño de la primera): San Pedro de Roma (c), y Santa Maria de Fiore en Florencia (d).⁶ Aunque las tres cúpulas no tienen exactamente la misma forma, ni el mismo tipo de construcción, es evidente que la "ley de semejanza" parece funcionar mucho mejor que la ley cubo-cuadrado.

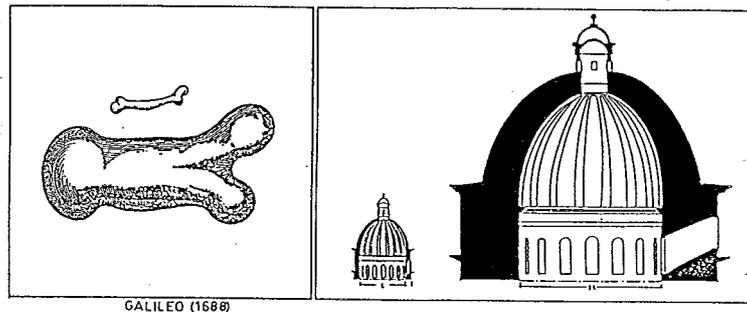


Figura 8.1. Ley de Galileo y su aplicación a una cúpula de fábrica

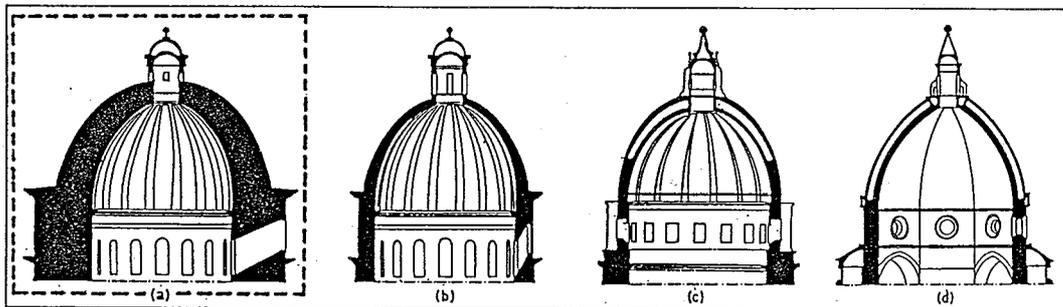


Figura 8.2. Comparación entre la ley de semejanza y la ley de Galileo

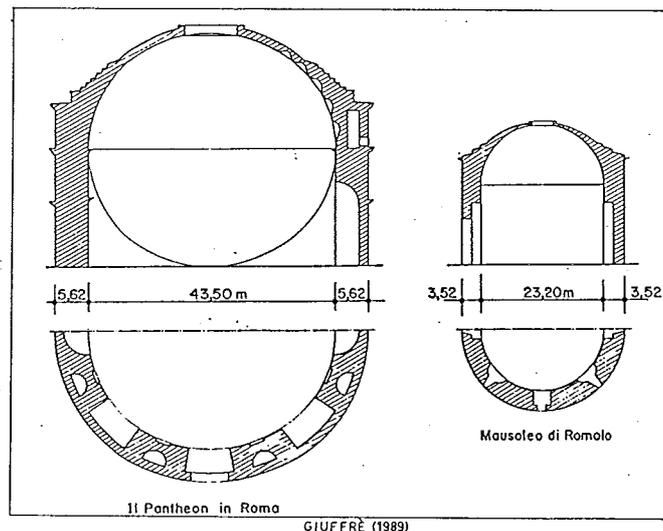


Figura 8.3. Ley de semejanza en cúpulas romanas.

6. Las dimensiones y las secciones de las citadas cúpulas se han tomado de J. Durm, *Die Baukunst der Renaissance in Italien*. Leipzig: 1914.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPÍRICAS

Puede hacerse una comparación del mismo tipo con otras estructuras de obra existentes, tales como las catedrales góticas, las cúpulas bizantinas o romanas (véase Figura 8.3)...etc. con los mismos resultados.

En el caso de los puentes y de las torres y chimeneas de fábrica parece que funciona una "ley inversa", y los puentes y torres se vuelven más esbeltos cuando aumentan en tamaño (véanse las Figuras 8.4 y 8.5)⁷. Parece, pues, que las afirmaciones de Galileo deben ser revisadas. Trataremos de hacerlo desde un planteamiento lo más general posible.

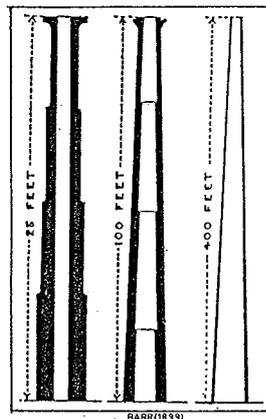
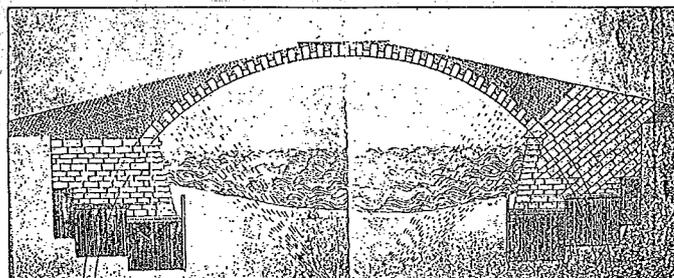
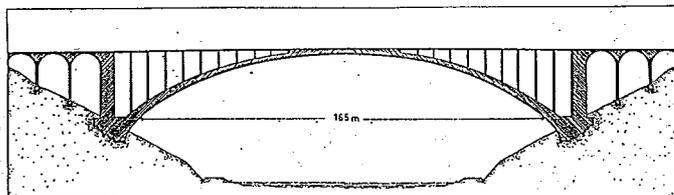


Figura 8.4. Comparación de chimeneas de distintos tamaños



(a)



(b)

Figura 8.5. Comparación de puentes de distintos tamaños. Los dos puentes de la figura tienen aproximadamente la misma relación flecha/luz. (a) Puente de Rialto, Florencia, siglo XVI. Material: piedra; Luz = 26 m; canto/luz (clave) = 1/25. (b) Proyecto para el Viaduc du Bernard. Freyssinet ca. 1910. Material: hormigón en masa. Luz = 165 m; canto/luz (clave) = 1/72.

7. Véase: A. Barr, *Address on the Application of the Science of Mechanics to Engineering Science*. London: The Institution of Civil Engineers, 1899, de donde se ha tomado la Figura.

8.1.1 Efectos de los cambios de escala: el Principio de Semejanza

Galileo fue el primero en estudiar los efectos de los cambios de tamaño en las estructuras. Sus estudios permanecieron casi olvidados durante unos 200 años⁸. A finales del siglo XIX este tema empezó a despertar el interés de algunos científicos, ingenieros y biólogos, que trataron de resolver problemas físicos muy complejos usando modelos, o, en el caso de los biólogos, que estudiaban los efectos del tamaño sobre la morfología de los animales y las plantas. Finalmente, estas investigaciones 'prácticas' y los trabajos teóricos de físicos y matemáticos sobre la homogeneidad de las ecuaciones físicas condujeron a la creación de una nueva disciplina el "análisis dimensional"⁹.

Estamos interesados aquí por un apartado de esta disciplina, "el principio de semejanza". Consiste en aplicar las leyes del análisis dimensional a comparar dos sistemas geoméricamente semejantes; en palabras de lord Rayleigh "la influencia de la escala sobre los fenómenos dinámicos y físicos"¹⁰. La teoría de modelos pertenece a este capítulo del análisis dimensional.

Esta clase de razonamiento asociado con el principio de semejanza es extremadamente potente y permite obtener rápidamente información acerca de un fenómeno. Citando, de nuevo, a lord Rayleigh: "ocurre con frecuencia que un razonamiento sencillo fundado sobre este principio nos dice aproximadamente lo mismo que obtendríamos de una investigación matemática exitosa."¹¹

8. Después de Galileo, Borelli, *De Motu Animalium*, 1685, aplicó el mismo enfoque para demostrar que el hombre nunca podría volar y para explicar porqué los animales pequeños saltan más. Véase: D'Arcy W. Thompson, "Galileo and the principle of Similitude.", *Nature*, Vol. 95, 1915, pp. 426-427. Isaac Newton en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687, Libro II, Sección VII, Prop. XXXII, Teorema XXVI, aplicó este principio por primera vez a un problema dinámico, el movimiento de dos cuerpos geoméricamente semejantes. Véase: G. Greenhill, "Mechanical Similitude.", *Mathematical Gazette*, Vol. 8, 1916, pp. 229-233.

9. Para un excelente resumen sobre el nacimiento y desarrollo histórico de esta disciplina, véase: J. Palacios, *Análisis Dimensional*, Madrid, 1964, pp. 9-17.

10. J. W. S. Rayleigh, J.W.S. "The Principle of Similitude." *Nature*, Vol. 95, 1915. pp. 202-203. (La traducción es mía.)

11. *Ibidem*. (La traducción es mía.)

8.1.2 Estructuras semejantes

Los campos principales de aplicación del principio de semejanza son la mecánica de los fluidos, la transferencia de calor y materia... y, en general cualquier disciplina donde la complejidad del fenómeno hace necesarios los experimentos con modelos. En edificación la teoría y métodos del análisis dimensional se han aplicado a la realización de ensayos sobre modelos; pero en su mayor parte se ha dedicado a casos particulares y no ha sacado conclusiones generales de diseño.

Sin embargo, el uso de este principio permite la formulación de conclusiones muy generales referentes al diseño de estructuras o, y esto es muy importante en la práctica constructiva, a inferir nuevas soluciones de otras ya existentes. Las contribuciones en este sentido son muy escasas.

El primer caso de aplicación sistemática de esta forma de razonamiento aparece en la obra de Rankine "Manual of Applied Mechanics"¹², antes incluso de la formalización del Análisis Dimensional como tal disciplina. En este importante libro Rankine trata de deducir sistemáticamente factores de forma adimensionales que le permitan sacar conclusiones de diseño en función del tamaño. Es particularmente interesante su "método de proyección paralela" que permite, dada una estructura, sacar conclusiones sobre su proyección sobre cualquier plano. Rankine aplicó este método a puentes colgantes, estructuras trianguladas y estructuras de fábrica. Posteriormente discutiremos las consecuencias de la aplicación del método a los arcos y bóvedas de fábrica. Entre

12. W. J. M. Rankine, *A Manual of Applied Mechanics*. London: 1855. (Hemos manejado la 3a edición de 1868). Su segundo libro, *A Manual of Civil Engineering*. London: 1861 (hemos empleado la 2a ed. 1863), aplica las consideraciones teóricas del primero a problemas prácticos de ingeniería. Sin duda se trata de dos de los libros más importantes sobre teoría de las estructuras en el siglo XIX. En palabras de Timoshenko: "Since their appearance, these books have seen many new editions [hemos contado más de 20 en el catálogo de la Library of Congress] and even now they are not completely superseded." *History of Strength of Materials*. New York: 1953, pág. 198.

la escasísima bibliografía sobre el tema, merecen destacarse también las contribuciones de Thomson¹³ y Barr¹⁴.

En el resto de esta Tercera Parte se hace un estudio de la estabilidad de los arcos bóvedas y cúpulas de fábrica, así como de sus contrafuertes, y de los efectos de los cambios de escala, empleando los métodos y razonamientos deducidos del *principio de semejanza*, con vistas a discutir las reglas empíricas y métodos empleados por los antiguos constructores. Estas consideraciones deben arrojar nueva luz sobre el proyecto y la interpretación histórica de las estructuras de fábrica¹⁵.

8.2 Arcos de fábrica

Consideraremos en primer lugar el caso de los arcos de fábrica (ó bóvedas de cañón). Consideremos un arco, sujeto a su propio peso, y supongamos que hemos definido su geometría de forma que podemos modificar la escala. Hemos definido por ejemplo la línea media del arco y una ley de variación del espesor. Para que este arco sea "seguro" se tendrán que cumplir ciertas condiciones referentes a la resistencia, deformación y estabilidad.

Las dos primeras, que corresponden a la aplicación de la teoría elástica, imponen que el material no debe alcanzar cierto nivel de tensión considerado "inseguro" o inadmisible, y que las deformaciones no deben superar un

13. J. J. Thomson, "Comparisons of Similar Structures as to Elasticity, Strength, and Stability." *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders of Scotland*, 1875. Publicado también en J. Thomson *Collected Papers in Physics and Engineering*. Cambridge: At the University Press, 1912, págs. 361-372.

14. A. Barr *Address on the Application...*, op.cit. más arriba, y A. Barr, "Comparisons of Similar Structures and Machines.", *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders of Scotland*, Vol. 42, 1899, págs. 322-260, lám. 20.

15. El carácter fundamentalmente correcto del enfoque tradicional con relación a los principios del análisis a rotura de las estructuras de fábrica, ha sido resaltado en varias ocasiones por J. Heyman. Véase, por ejemplo: "Beauvais Cathedral." *Transactions of the Newcomen Society*, Vol. 40, 1967/68, pp. 15-35; "On the Rubber Vaults of the Middle Ages." *Gazette des Beaux-Arts*, Vol. 71, 1968, pp. 177-188. Véase también la excelente exposición de J. Gordon, *Structures* (Harmondsworth: 1977), Cap. 9 "Walls, arches and dams", pp. 171-197.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

cierto umbral que impida el uso adecuado de la estructura.

La tercera, que corresponde a la aplicación del análisis límite, fija algunas restricciones referentes a la posición de la línea de empujes. Como hemos visto en la Primera Parte, para que el arco sea estable debe ser posible dibujar al menos una línea de empujes, compatible con las cargas, en su interior. Esto conduce, en general, dada la no coincidencia entre la directriz y la línea de empujes, a un "límite inferior" para el espesor, es decir, una "forma límite", para un sistema de cargas dado (véase Figura 8.6 (a)). Podemos aplicar entonces un "factor geométrico de seguridad" estableciendo que la línea de empujes deberá pasar siempre dentro de una cierta fracción del espesor, digamos $1/3$ o $1/4$ ¹⁶ (véase Figura 8.6 (c)).

Las condiciones mencionadas anteriormente deben cumplirse simultáneamente. El diseño definitivo está determinado por la condición más restrictiva. Estudiaremos primero el caso con sólo peso propio y después trataremos el efecto de las cargas vivas.

8.2.1 Peso propio

En este caso, la posición de la línea de empujes esta determinada por la forma geométrica de la estructura y, por ello, su forma límite es independiente de la escala. La aplicación del factor geométrico de seguridad da origen a formas semejantes. Sin embargo, con respecto a la tensión, el aumento de espesor es una función lineal del tamaño. Es mejor ver el efecto de ambos factores por medio de un ejemplo. Supongamos que tenemos un arco de espesor constante y una cierta directriz, y que conocemos su forma límite. En este caso puede representarse por un solo factor de forma, la relación espesor/luz (c/L) que llamaremos "esbeltez del arco".

16. Véase: J. Heyman *The Masonry Arch*. Chichester: 1982, y la discusión correspondiente en la Primera Parte de esta Tesis.

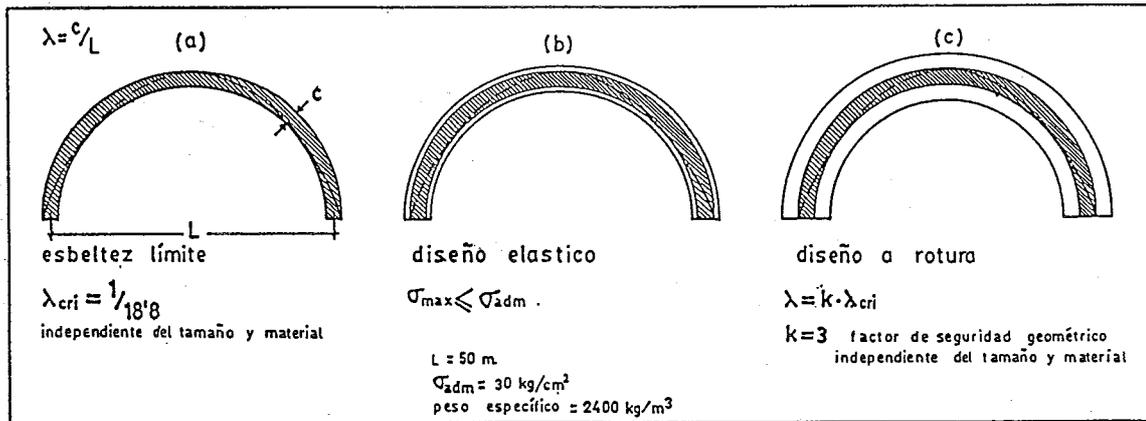


Figura 8.6. Diseño de un arco semicircular: métodos elástico y a rotura

Tomamos este "arco límite" como punto de partida para el diseño. Para un cierto valor del vano la condición elástica impone un aumento del espesor hasta alcanzar el valor admisible para la tensión en el punto más desfavorable (figura 4(b)). Si dibujamos una curva que relaciona la esbeltez del arco (c/L) con la luz (L) obtenemos la curva E en la Figura 8.7, que muestra el aumento del espesor cuando aumenta el vano.

En la condición de rotura o límite, el factor geométrico de seguridad mencionado anteriormente, produce una línea recta horizontal R (Figura 8.7). La zona de seguridad está por encima de estas dos líneas. El punto de intersección representa la dimensión en la que el diseño a rotura deja de ser el más restrictivo.

Este punto marca el intervalo válido de aplicación de las reglas proporcionales para el diseño de los arcos. Su posición depende de la forma del arco, y del peso específico y de la tensión admisible del tipo de fábrica elegido.

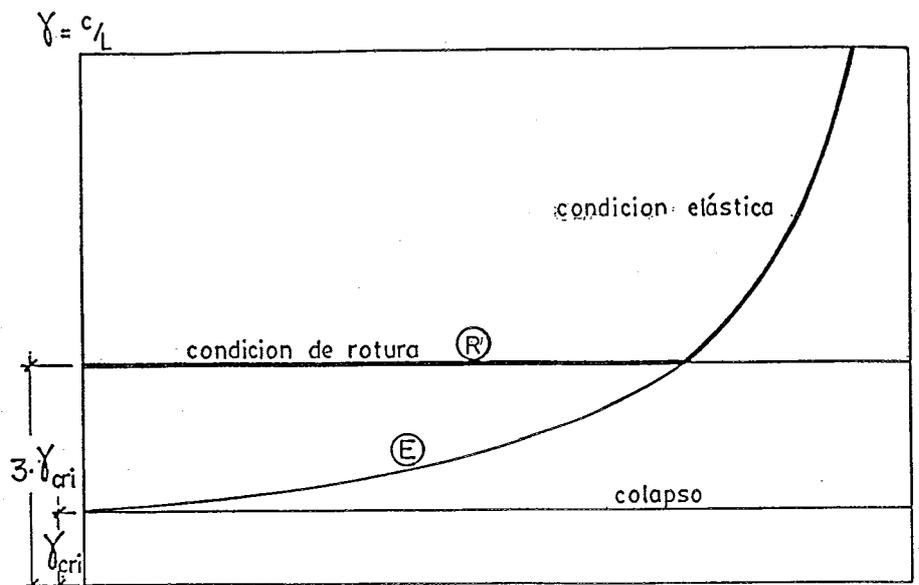


Figura 8.7. Diseño elástico y a rotura de un arco

En la Figura 8.8 hemos dibujado las mismas curvas para los dos arcos de fábrica mas corrientes: un arco semicircular exento, y con relleno hasta la clave. La esbeltez límite es para el primero es $1/18.8$ y para el segundo $1/44$, aplicando un factor geométrico de 3 obtenemos aproximadamente $1/6$ y $1/14$. Estas líneas horizontales cortan las curvas correspondientes para el proyecto elástico en valores para el vano de 82 y 106 m respectivamente (tensión admisible = 30 Kg/cm^2 ; peso específico del arco = 2200 kg/m^3 ; peso específico del relleno = 1800 kg/m^3)¹⁷. Como las tensiones aumentan linealmente con las dimensiones, estos resultados pueden extrapolarse fácilmente para otras tensiones admisibles (mayores o menores).

Como puede verse fácilmente, el punto crítico esta bastante por encima de las dimensiones normales de las estructuras de fábrica construidas con esta forma, puesto que los mayores arcos semicirculares construidos tienen un vano inferior a 60m^{18} .

17. Los cálculos se han realizado teniendo en cuenta las siguientes simplificaciones: a) la línea de empujes no sufre una variación significativa en su forma debido al incremento del espesor; b) la distribución de tensiones es rectangular debido a la plastificación de la fábrica.

18. Para un inventario exhaustivo de todos los grandes arcos de más de 40 m. de luz, véase la monumental obra de P. Sejourné, *Grandes Voûtes*. Bourges: 1913-1916, 6 vols.

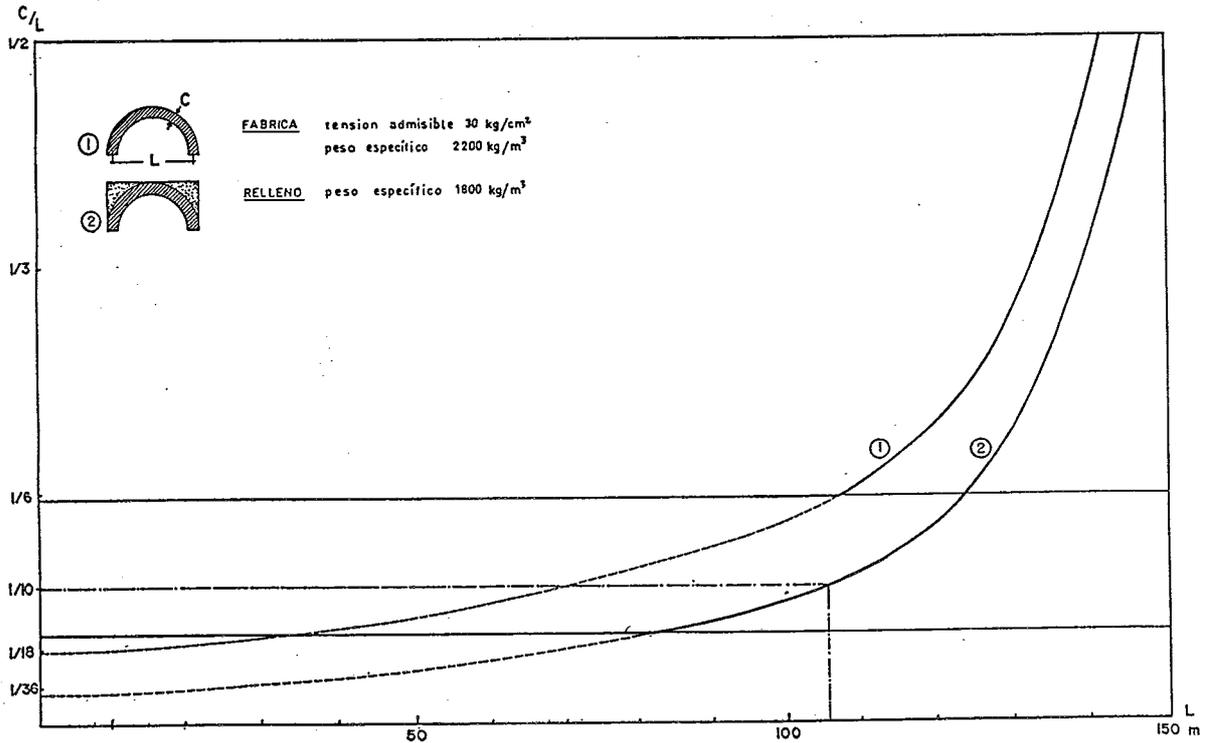


Figura 8.8. Posición del punto crítico para arcos semicirculares

El mismo tipo de consideraciones pueden hacerse para los otros tipos de arcos tradicionales (ojivales, carpaneles, elípticos,....) que se encuentran en la arquitectura histórica. En general, la forma impuesta por la estabilidad produce un bajo nivel de tensión para un intervalo de dimensiones que comprende fácilmente toda la arquitectura de fábrica edificada hasta la fecha.

Por tanto, para todas las estructuras en las que la acción fundamental es el peso propio, las bóvedas de fábrica de las iglesias y catedrales, y, en general, de los edificios, el uso de las reglas proporcionales, es decir de factores de forma adimensionales, es un método de diseño racional y seguro.

El medio mas sencillo de especificar estos parámetros de forma para un sistema de estructuras semejantes es dar un serie de fracciones. Esto es

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

precisamente lo que hicieron los maestros de obra tradicionales. Como hemos visto en la Segunda Parte, los maestros de obra góticos expresaron de esta manera la relación espesor/vano para los nervios de las bóvedas de crucería y este tipo de reglas para el proyecto de arcos y bóvedas ha sido usado hasta nuestro siglo (puede encontrarse en muchos manuales de ingeniería y construcción). Así, pues, las reglas proporcionales "pueden ser válidas". Más adelante veremos cuál es su campo de aplicación.

8.2.2 Cargas vivas

Consideraremos ahora la acción de una carga puntual P que puede colocarse en cualquier punto a lo largo del arco. En este caso, podemos obtener para un cierto valor y posición de P , y un determinado valor del vano una esbeltez límite para el arco; llamaremos a esta carga que produce el colapso en esas condiciones "carga crítica". Al variar la posición de P varía también el valor de la esbeltez límite; el máximo de estos valores representa la esbeltez límite de diseño para la carga crítica P y la luz L .

Esta esbeltez sera mayor que los valores correspondientes con sólo peso propio, y por eso se debe aumentar en forma correspondiente el espesor del arco.

¿Cómo variará la carga crítica P en estructuras semejantes de distintos tamaños? Para estudiar esta variación para una forma de arco dada en relación con el tamaño podemos utilizar con gran provecho los métodos del análisis dimensional. Las variables que intervienen en el problema son: la carga puntual P , la luz del arco L , y el peso específico μ de la fabrica (en el supuesto de que el arco y el relleno son del mismo material). El análisis dimensio-

nal da la siguiente ecuación¹⁹ :

$$P = \mu L^2 \Phi(w_1, w_j, \dots)$$

donde Φ es una función de w_1, w_j, \dots factores de forma deducidos de la geometría del arco y de la posición de las cargas. Hemos supuesto que P es una fuerza que actua por unidad de longitud perpendicular al plano del arco. Si P es una carga puntual actuando sobre un arco de ancho dado será proporcional a L^3 .

En dos arcos semejantes de diferente material se verifica:

$$\frac{P}{P'} = \frac{\mu L^2}{\mu' L'^2}$$

si son del mismo material:

$$\frac{P}{P'} = \frac{L^2}{L'^2}$$

En el primer caso, las cargas críticas son proporcionales a los pesos específicos y a las dimensiones de la luz al cuadrado es decir, a los pesos de los arcos (puesto que estamos considerando una sección entre dos planos paralelos). En el segundo caso las cargas puntuales críticas son proporcionales a la relación de semejanza al cuadrado.

Aunque el análisis dimensional no dice nada de la forma de la función Φ el resultado es importante porque permite fácilmente la extrapolación de un caso particular. Podemos obtener el valor de Φ para un caso dado:

$$\Phi(w_1, w_j, \dots) = \frac{P_1}{\mu_1 L_1^2}$$

y después obtener el valor para una estructura semejante de distinto material (μ_2) y tamaño (L_2)²⁰.

19. We have followed the method given in J. Palacios, *Análisis Dimensional*, Madrid, 1964, pp. 78 and ff. and 113-114.

20. Heyman ha obtenido el valor de la función Φ para el caso de una carga puntual P situada a un cuarto de la luz. Su planteamiento es menos general que el aquí propuesto. Véase: J. Heyman "The estimation of the strength of masonry arches." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, Vol. 69, 1980, pp. 921-937, y, *The Masonry Arch*. Chichester, Chichester: Ellis Horwood, 1982, pp. 72-78.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

Es evidente, por la forma de la ecuación, que cualquier par de valores (Φ, P) , (P, L) ó (Φ, L) define los restantes, para un material dado. Para ver la variación en un caso concreto en la Figura 8.9. hemos dibujado los resultados para un arco semicircular de espesor constante con la carga P aplicada en la clave.

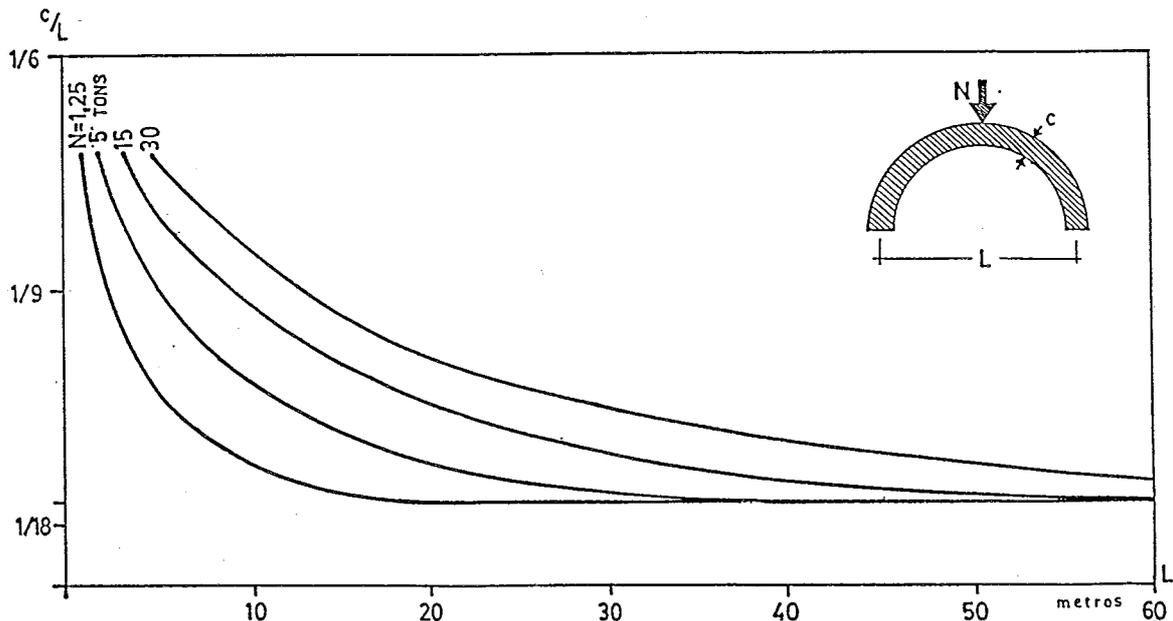


Figura.8.9. Esbeltez crítica de un arco con carga puntual en su clave

Podemos ahora hacer algunas consideraciones sobre los efectos del cambio de tamaño en estructuras semejantes con una carga puntual que supondremos constante.

Para estructuras semejantes del mismo material, para obtener el mismo grado de estabilidad, P debe de variar con la inversa del cuadrado de la razón de semejanza.

Sin embargo, en la practica normal, no es este el caso, y el valor de P depende de la situación y del uso de la estructura.²¹ Podemos, entonces, considerar P como una constante, para cada tipo de vía de comunicación. En

21. Efectivamente, en el caso de los puentes se estudia el efecto de una carga puntual que representa la carga máxima que, se supone con un grado de probabilidad suficiente, puede pasar por encima.

este caso, es fácil ver que si tenemos un arco estable cualquier arco semejante de mayor tamaño, será "más estable" puesto que la línea de empujes se desviaría mucho menos de su directriz.

En efecto, desde el punto de vista de la estabilidad, cuando mayor sea el puente más esbelto puede hacerse, como ya habíamos observado en la Figura 8.4 sobre dos ejemplos concretos. Este tipo de "ley inversa" se aplica también en el caso de las torres de obra sujetas al viento (véase la Figura 8.5 más arriba). La única verificación sería comprobar que el nivel de las tensiones no sube por encima del nivel admisible del material.

Como hemos visto, las reglas empíricas usadas en el proyecto de puentes dan todas para arcos semejantes, una disminución relativa del espesor al aumentar el tamaño. En la Figura 8.10 hemos representado las reglas bien conocidas de Perronet, Croizette-Desnoyers y Dupuit²². Compárese también con la Figura 7.15., donde se ha representado la regla empírica de Gautier. También se ha representado la regla dada por Martínez de Aranda²³. La regla se aplica explícitamente solo a arcos con dimensiones en un intervalo dado.

Por el contrario, un arco de menores dimensiones necesitaría una verificación completa de su estabilidad. Sin embargo, si conocemos la carga crítica del arco original, podemos calcular inmediatamente la carga crítica del nuevo arco. En el caso en que las dos cargas puntuales no fueran las mismas (distintos tipos de vías de comunicación), en ocasiones esta verificación sería suficiente. En este caso, evidentemente, no es necesaria la comprobación de los niveles tensionales.

22. Véase: P. Croizette-Desnoyers, *Cours de Construction des Ponts*. Paris, Dunod, 1885, Vol.2, pp. 1-30; J. Dupuit, *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Paris, Dunod, 1870, pp. 169-197. Para un punto de vista 'elástico', véase: M. Davidesco, "Examen critique des formules employées pour déterminer l'épaisseur à la clef des voûtes en maçonnerie." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1906, pp.247-253.

23. Véase página 135 más arriba.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPÍRICAS

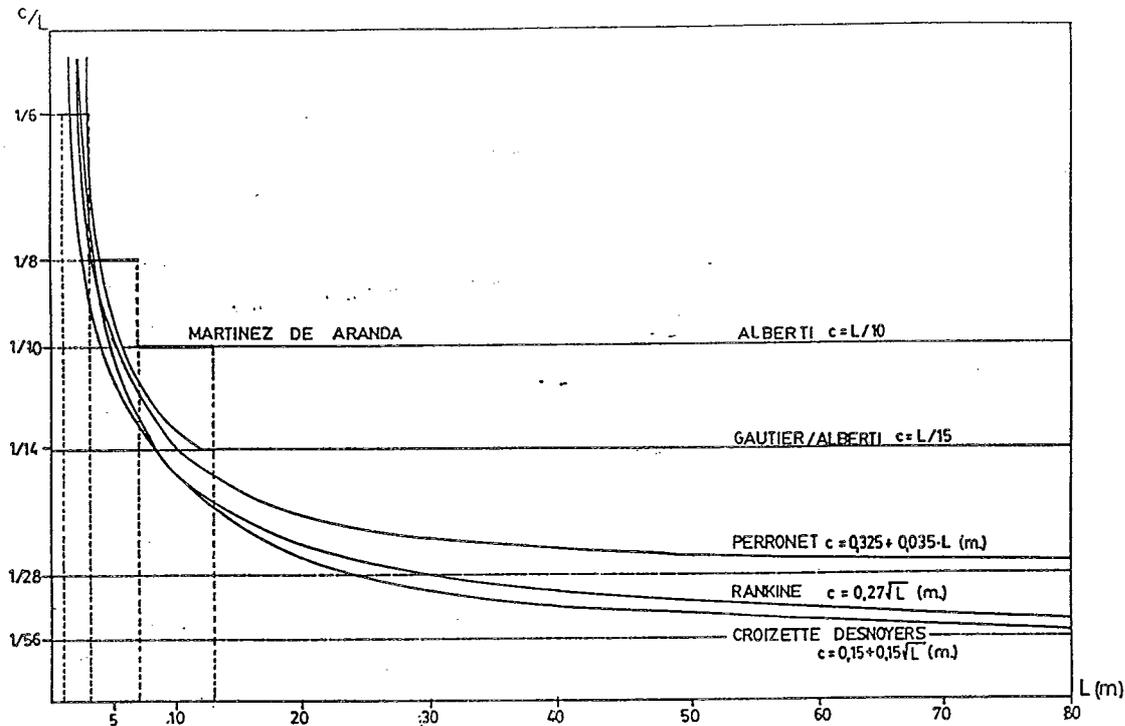


Figura 8.10. Reglas empíricas para dimensionamiento de puentes de fábrica

Esto parece invalidar las reglas de proporcionalidad para el caso en que las cargas puntuales son significativas, como en el caso de los puentes, en el que para cada tamaño podemos encontrar una solución única. Sin embargo, serían válidas si representaran un límite superior de la esbeltez para las cargas más desfavorables. Esta es la situación en la mayoría de los casos de la esbeltez de los puentes romanos y del renacimiento comprendida normalmente entre $1/8$ y $1/12$ del vano.

Hemos visto que la regla de Alberti, véase Figura.5.22 (pág. 154), empleaba este enfoque proporcional. Quizá, el método más racional y que permitiría aprovechar el uso de formas semejantes, es el de Martínez Aranda, también usado por Gauthey, definiendo relaciones sencillas para ciertos intervalos de las dimensiones.

8.2.3 Límites de tamaño

El límite de tamaño para un arco de fábrica depende, fundamentalmente, de la tensión admisible y peso específico del material, y de la forma del arco. Aplicando de nuevo el análisis dimensional obtenemos:

$$\sigma_{\max} = \Phi(w_1, w_2, \dots) \mu L$$

donde σ_{\max} es la tensión máxima, μ es el peso específico del material, L es el vano y $\Phi(w_1, w_2, \dots)$ es una función de los factores de forma. El valor de Φ puede usarse para medir la eficacia de distintas formas de arcos.

La cuestión de cuál sería la luz máxima que puede cubrir un arco de fábrica ha preocupado a los ingenieros desde el principio del análisis estructural. Ingenieros eminentes como Perronet²⁴, Dupuit²⁵, Sejourné²⁶ y Freyssinet²⁷, por citar sólo los más significativos, dedicaron mucho tiempo a reflexionar sobre este problema. Para servir como punto de referencia, la Tabla 8.1²⁸ da una lista de los mayores arcos de obra del mundo, con indicación de las tensiones máximas en los casos en que éstas son conocidas. Es excepcional el puente sobre el río Adda en Trezzo, Italia, con una luz libre de 72 m, que sólo fue superada a finales del siglo XIX. Debe mencionarse otro puente no incluido en la tabla: Leonardo da Vinci proyectó un puente para el sultán Bajezid II sobre el Cuerno de Oro en Estambul con un vano de 240 m. Lo que queda de este proyecto son algunos esquemas pero la forma del puente está

24. J. R. Perronet, *Mémoire sur la recherche que l'on pourroit employer pour construire de grandes Arches de pierre* ... Paris: Imprimerie Nationale, 1793.

25. J. Dupuit, "Des limites de l'ouverture des arches en maçonnerie.", *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*. Paris: Dunod Editeur, 1870, págs. 193-208.

26. P. Sejourné, "Quelques réflexions pratiques sur les voûtes a grande portée.", *Annales des Ponts et Chaussées*, 1886, pp. 497-502.

27. E. Freyssinet, "Perfectionnement dans la construction des grandes voûtes.", *Le Génie Civil*, Vol. 58, 1921, pp. 97-102, 124-128, 146-150; y, "Les Ponts en béton armé de très grande portée.", *Mémoires de la Société des Ingenieurs Civiles de France*, 1930, pp. 376-379.

28. La información se ha tomado fundamentalmente de P. Sejourné, *Grandes Voûtes*, op. cit. más arriba.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

claramente definida y permitió a Stüssi²⁹ realizar un análisis de su estabilidad y resistencia (véase Figura 8.11). Dedujo que el proyecto era factible, siendo el puente estable y presentando un tensión máxima de 90 kg/cm² en la base de los arranques.

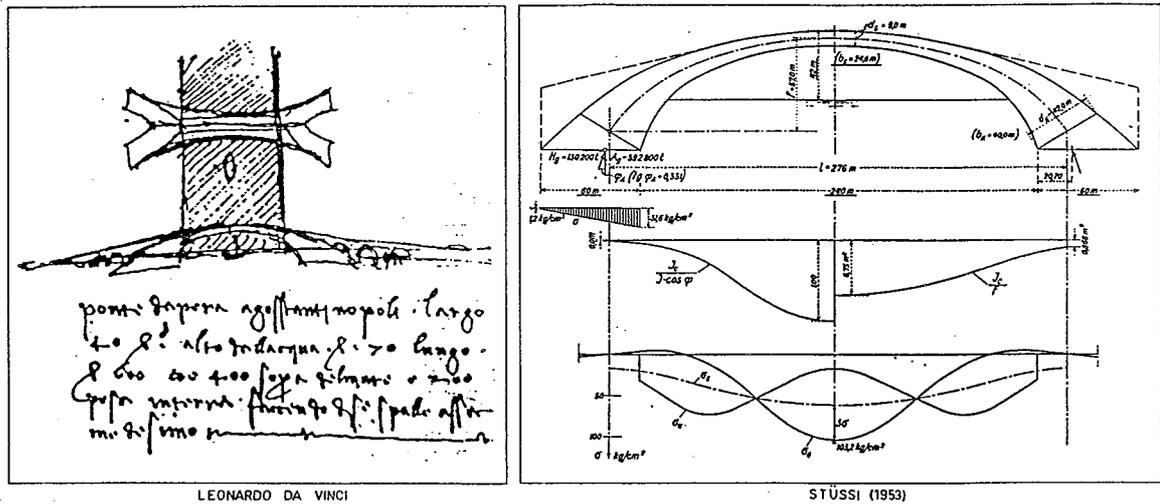


Figura 8.11. Proyecto de Leonardo para un puente sobre el Cuerno de Oro.

El mayor puente moderno proyectado en hormigón en masa, el "Viaducto" de Bernand, fue proyectado por Freyssinet con un vano de 165 m, nunca fue construido debido al comienzo de la Primera Guerra Mundial.

GRANDES PUENTES DE FABRICA	LUZ (m)	σ_{max} (kg/cm ²)
Puente de Walnut-Lane (EE UU, 1906-8)	71	27
Puente sobre el Adda en Trezzo (Italia, siglo XIV)	72	-
Puente de Montanges (Francia, 1908-9)	80	50
Puente de Luxemburgo (Lux., 1895-1903)	85	51
Puente sobre el Rocky River (EE UU, 1908-10)	85	48
Puente de Plauen (Alemania, 1903-5)	85	44
Puente de Villeneuve (Francia, 1914-19)	90	69
Puente de Bernand (proyecto, Francia 1913)	165	81

Tabla 8.1 Grandes puentes de fábrica

29. F. Stüssi, "Leonardo da Vincis Entwurf einer Brücke über das Goldene Horn.", *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 71, 1953, pp. 113-116.

Estos grandes puentes parecen establecer un límite superior para la luz de este tipo de estructuras. Sin embargo, Freyssinet creía firmemente en la posibilidad de construir puentes de fábrica con luces superiores a 1 Km; fijó el límite alrededor de los 2 Km basándose en la economía de las cimbras.³⁰

Por lo que sabemos, la mayor luz de una arco no-metálico es la del Gladesville Bridge, en Australia, en hormigón armado y con un vano de 1000 pies (305 m); la tensión máxima es de 140 kg/cm².³¹

8.2.4 Teorema de la proyección paralela de Rankine

Hasta ahora hemos hablado de estructuras semejantes. Sin embargo, la semejanza es un caso restringido de una relación geométrica mas general entre figuras: la transformación proyectiva, o, empleando la terminología de Rankine, la *proyección paralela*. Como dijimos antes, este caso general ha sido estudiado por Rankine, que enunció el "método de la proyección paralela".

Dos figuras son "proyección paralela" una de otra si entre ellas existe una relación tal que a cada punto de una corresponde un punto de la otra, y que a cada sistema de dos líneas paralelas iguales corresponde en el otro sistema de dos líneas iguales y paralelas.

Rankine representó la proyección paralela por su expresión matemática. Definida una figura por sus coordenadas respecto a unos ejes x, y, z, rectangulares u oblicuos, una segunda figura definida respecto a otros ejes x', y', z' es una proyección paralela de la primera si entre cada dos puntos homólogos, sus coordenadas cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{x'}{x} = a, \quad \frac{y'}{y} = b, \quad \frac{z'}{z} = c,$$

30. Véase: Freyssinet, op. cit. más arriba, y F. Fernández Ordóñez *Eugene Freyssinet*, Barcelona: 20 Ediciones, 1978, pp. 377-378.

31. Véase: J. W. Baxter; A. F. Gee y H. B. James, "Gladesville Bridge." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 30, 1965, pp. 489-530.

donde a, b, c son constantes. Mas adelante daremos una interpretación geométrica mas sencilla para la figuras planas.

Las proyecciones paralelas de las figuras planas y espaciales tienen un conjunto de propiedades geométricas³². Estas propiedades permiten obtener conclusiones sobre la variación de longitudes superficies y volúmenes, así como sobre sus centros de gravedad. También pueden aplicarse a la transformación de sistemas de fuerzas en equilibrio. En este último aspecto, Rankine enunció el siguiente teorema : "...si un sistema de fuerzas en equilibrio que actúa sobre un sistema de puntos, lo representamos por un sistema de líneas [polígono de fuerzas], entonces cualquier proyección paralela de este sistema de líneas representará un sistema de fuerzas en equilibrio"³³.

Rankine lo aplicó para estudiar los efectos del cambio y forma sobre el equilibrio de las estructuras trianguladas de barras³⁴, los puentes colgantes y catenarias³⁵, los arcos³⁶ y las estructuras de fábrica³⁷. Su estudios sobre la transformación de estructuras llevaron a la formulación por Maxwell del teorema del teorema de las "figuras recíprocas"³⁸.

En relación con nuestro estudio nos interesa el teorema que enunció sobre la estabilidad de las "transformaciones de las construcciones formadas por bloques", que es de aplicación directa a las estructuras de fábrica. La

32. Véase: W. J. M. Rankine, *Applied mechanics*, op. cit., Cap. IV, "Parallel projections in static.", págs. 45-47.

33. Rankine, op. cit., pág. 47. (la traducción es mía).

34. Rankine, op. cit., pág. 162.

35. Rankine, op. cit., págs. 180-182.

36. Rankine, op. cit. págs. 182-208.

37. Rankine, op. cit., págs. 232-233 y 268-269.

38. J. C. Maxwell, "On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces.", *Philosophical Magazine*, Vol. 27, 1864, págs. 250-261; y "On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces.", *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, Vol. 26, 1876, págs. 1-46. Véase también sobre este tema: S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*. New York: 1953, págs. 197-208, and I. M. Charlton, *A History of the Theory of Structures in the Nineteenth Century*. Cambridge: 1982, págs. 58-66, 73-93.

prosa de Rankine no destaca por su claridad, aunque sí por su precisión.³⁹ Traduciendo al lenguaje común, el teorema establece que si una construcción formada por bloques que soporta la acción de un sistema de fuerzas representado por un sistema de vectores es estable, cualquier proyección paralela será también estable y presentará el mismo grado de estabilidad, bajo la acción de un sistema de fuerzas proyección del original.

La posición relativa de la línea de empujes respecto de las líneas (o superficies) de extradós e intradós será la misma.⁴⁰ Esto implica la posibilidad de obtener, dado un arco estable para un sistema de cargas un número infinito de arcos estables⁴¹.

Hemos enunciado antes la definición matemática de proyección paralela. Para una figura plana es fácil encontrar una interpretación geométrica sencilla: dando una figura referida a dos ejes x, y que forman un eje cualquier proyección paralela puede reducirse a la combinación de tres transformaciones básicas, dilatación o reducción en la dirección de cualquiera de los ejes y variación del ángulo entre ellos. En la Figura 8.12. hemos representado estas transformaciones básicas y algunas combinaciones de ellas. Como el arco origi-

39. He aquí el enunciado de Rankine: "If a structure composed of blocks have stability of position when acted on by forces represented by a system of lines, then will a structure whose figure is a parallel projection of the original structure have stability of position when acted on by forces represented by the corresponding parallel projection of the original system of lines; also, the centres of pressure and the lines representing the resultant pressures at the joints of the new structure will be corresponding projections of the centres of pressure and the lines representing the resultant pressures at the joints of the original structure.", op. cit., pág. 232.

40. Esta importante propiedad parece haber pasado desapercibida en las sucesivas contribuciones a la teoría de arcos. Únicamente Föppl dedica un apartado al caso más elemental de proyección plana de arcos "Schiefe Projektion des Gewölbequerschnittes mit eingezeichneter Stützlinie". Lo considera como descubrimiento suyo y se maravilla que no se haya empleado con anterioridad: "...dies einfache und bequeme Verfahren scheint... bisher unbekannt geblieben zu sein.". Véase: A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik. Zweiter Band. Graphische Statik.*, 2a. Ed. Leipzig: 1903. También hemos encontrado casos aislados del empleo de la proyección paralela en H. T. Eddy, *Researches in Graphical Statics*. New York: 1878.

41. El único límite radica en la dependencia de la forma de la línea de empujes del sistema de planos de corte elegido. Para una excelente exposición sobre esta relación, véase: J. Dupuit, *Traité de l'équilibre des voûtes...*, op. cit. págs. 80-107. La teoría matemática completa de las líneas de empujes esta expuesta en: M. Milankovitch, "Theorie der Drückkurven.", *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Vol. 55, 1907, pp. 1-27.

nal es estable cualquier proyección tiene el mismo grado de estabilidad.

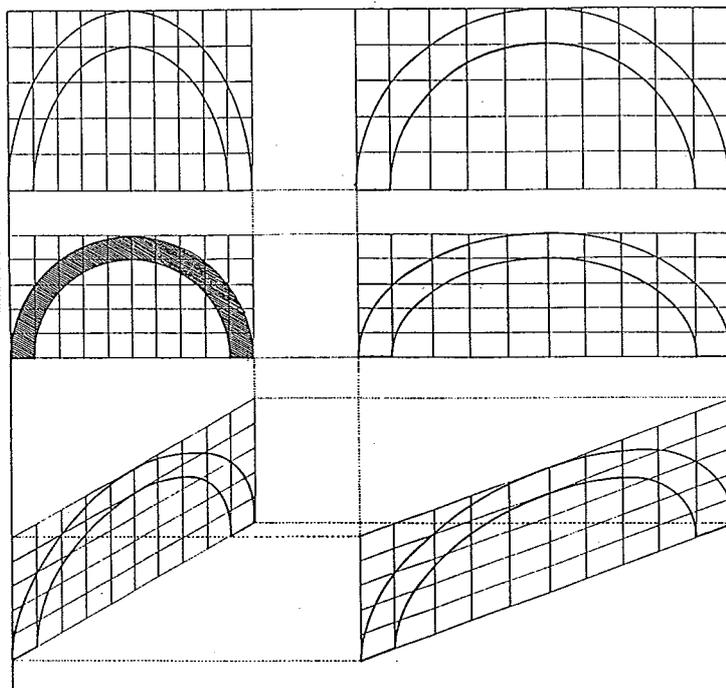


Figura 8.12. Proyecciones paralelas de Rankine

El teorema es muy potente y permite la solución rápida de algunos problemas prácticos como el de adaptar la forma del arco a una relación dada entre la flecha y la luz, u obtener un arco asimétrico con sus arranques a distinto nivel.

Por ejemplo, los tres arcos representados en la figura 8.13. producen el mismo empuje horizontal. Sin embargo, el arco A contiene la mitad de material que el arco B y el arco C el doble. Las tensiones están en proporción inversa, tomando como referencia el arco B, son dobles en A y la mitad en C.

Otro ejemplo se muestra en la figura 8.14., donde todos los arcos sobre contrafuertes presentan el mismo grado de estabilidad.

Por supuesto, las tensiones varían y es necesario hacer pequeños cálculos, si las tensiones en el arco original están cercanas al límite admisible, o si producimos un cambio grande en la forma. Pueden deducirse formulas matemáticas para obtener el aumento de tensión, y, en efecto, Rankine suministra

la correspondiente ecuación matemática⁴², pero sería mas sencillo y libre de errores obtenerla gráficamente.

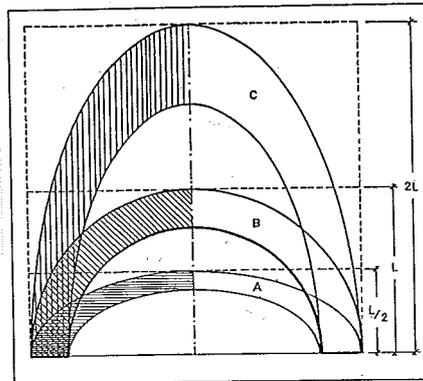


Figura 8.13. Proyecciones paralelas de un arco de medio punto

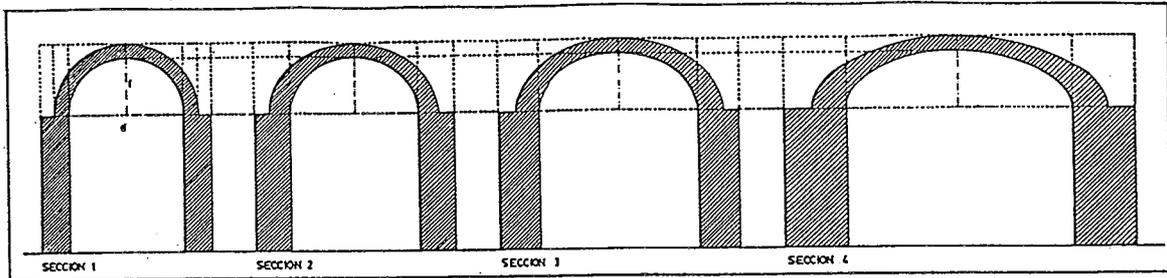


Figura 8.14. Proyecciones paralelas de un bóveda de cañón

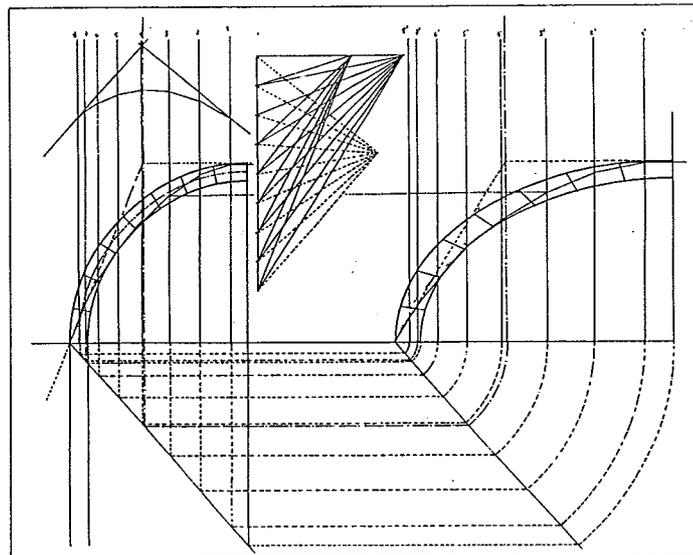
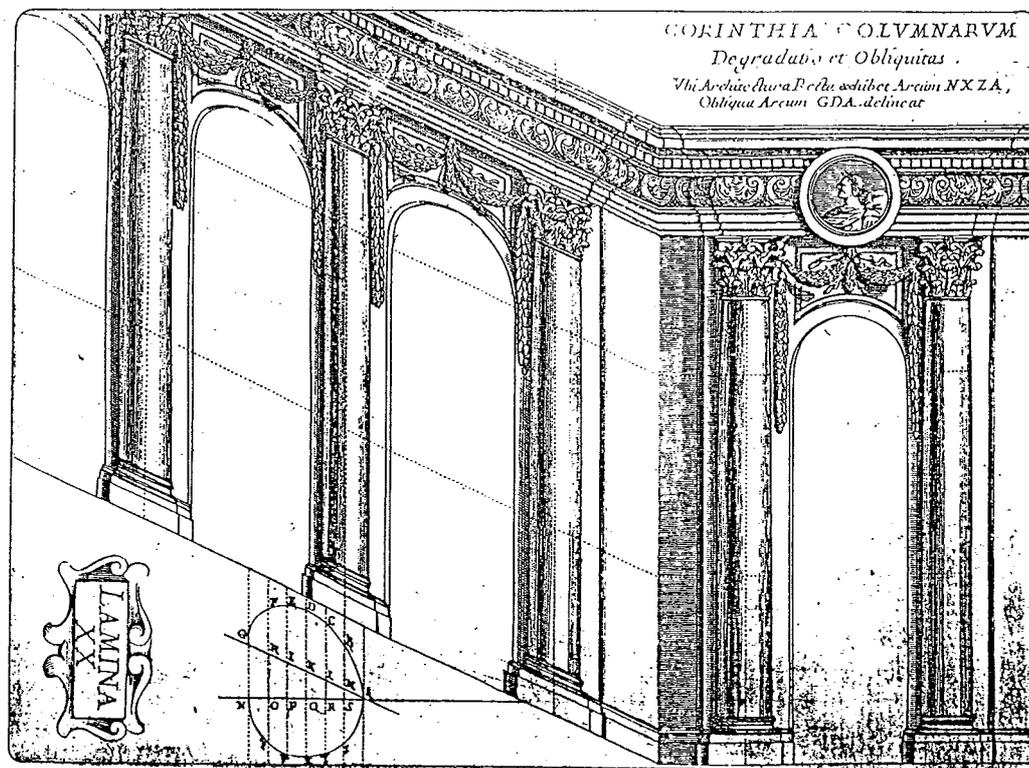


Figura 8.15. "Demostración" gráfica del Teorema de Rankine

42. Manual of Applied Mechanics, op. cit., págs. 268-269.



CARAMUEL (1678)

Figura 8.16. El teorema de Rankine y la *Arquitectura oblicua* de Caramuel. Curiosamente, el teorema de Rankine establece que las formas obtenidas en la arquitectura oblicua, definida por Caramuel⁴³ y, más tarde, por Tosca⁴⁴ tienen el mismo grado de estabilidad que sus homólogas en la *Arquitectura recta*. Así, en la Figura, las arcadas de la escalera presentan la misma estabilidad que las del piso horizontal.⁴⁵

8.2.5 Reglas empíricas sobre diseño de arcos

A continuación discutiremos, a luz de las consideraciones anteriores, la validez de las reglas y métodos empleados por los antiguos constructores para el dimensionamiento de los arcos y de sus contrafuertes. Consideraremos por separado los dos casos posibles: arcos en edificios (sólo peso propio) y arcos en puentes (peso propio + carga puntual variable).

43. J. Caramuel, *Architectura Civil Recta, y Obliqua*. Vigévano: Imprenta Obispal, 1678.

44. T. M. Tomás Vicente *Compendio matemático... Vol. 5, Arquitectura civil...* Valencia: Antonio Bordazar, 1707-1715.

45. La tendencia general es a considerar este tipo de arquitectura más inestable. Véase: J. Perucho, "Tomás Vicente Tosca y la Arquitectura Oblicua." *ABC*, 7 julio, 1988. pág. 3 X-436

8.2.5.a Arcos en edificios

Las reglas sobre el diseño de los arcos en edificios son escasas: las que han llegado hasta nosotros, sin embargo, siempre expresan el canto del arco (que se considera constante) como una fracción simple de la luz.

Como acabamos de ver, a cada forma de arco y carga, le corresponde una esbeltez límite que constituye la base del diseño y que es independiente del material y del tamaño. Las esbelteces límites de las tres formas de arco de sección constante más comunes, apuntado, de medio punto y elíptico rebajado son parecidas y aparecen en la Figura 8.17. Aplicando la ley del tercio, obtendríamos una esbeltez de diseño de entre $1/5$ y $1/7$ de la luz.

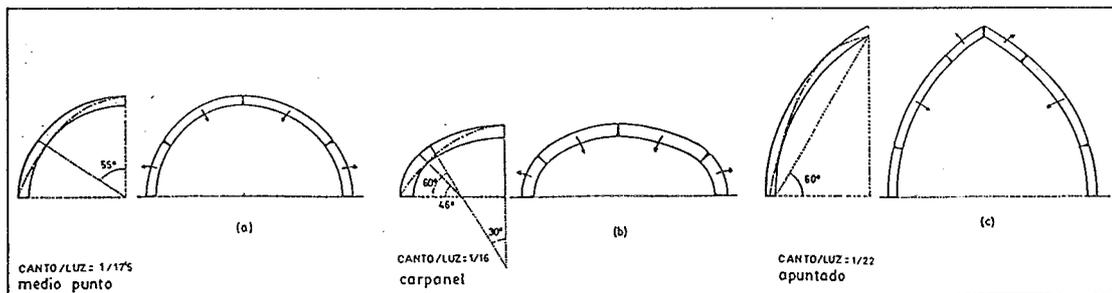


Figura 8.17. Esbelteces y formas de colapso de los tres arcos básicos

Estas esbelteces tan conservadoras, coinciden aproximadamente con las recomendadas por Martínez de Aranda (véase Figura 8.10 más arriba). Sin embargo, los arcos que pueden verse en los edificios son notablemente más esbeltos.

La razón de esto estriba en la manera en que están cargados o construidos estos arcos. Consideremos un arco de directriz circular; su esbeltez límite depende de la relación flecha/luz y disminuye muy rápidamente a medida que se rebaja el arco, como puede apreciarse en la gráfica de la Figura 8.18.

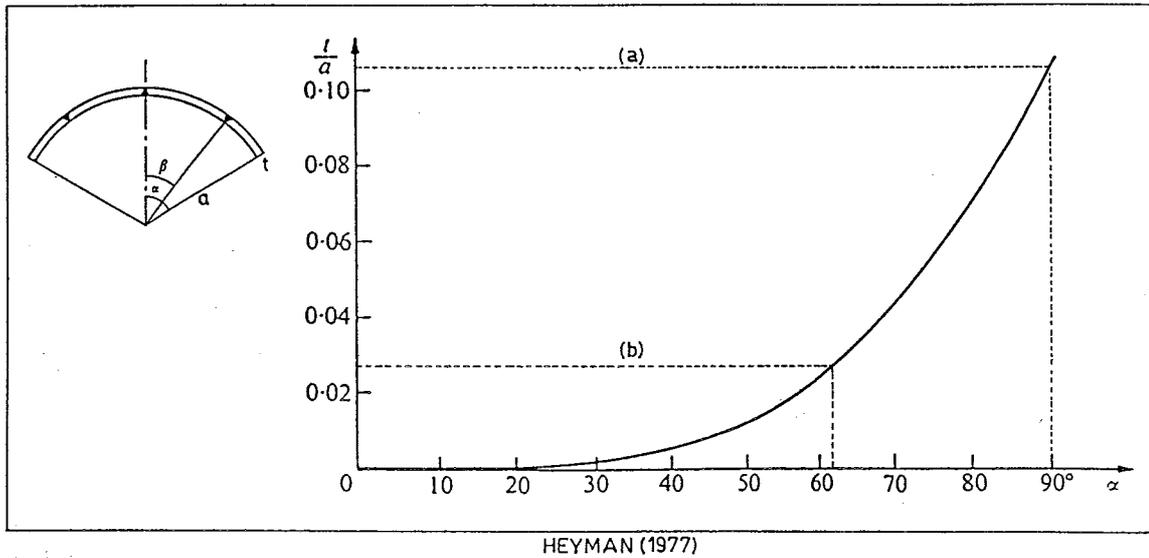


Figura 8.18. Esbelteces límite de arcos circulares

Si, por ejemplo, levantamos los contrafuertes hasta la mitad de la flecha del arco podemos dividir la esbeltez de diseño por cuatro. Esto se traduce en: (1) ahorro de material en el arco; (2) ahorro de material en el contrafuerte; (3) ahorro de piedra tallada (el pequeño espesor de las dovelas en el segundo caso hace que, en la práctica, no necesiten ser talladas y el cambio de curvatura se consigue con las juntas de mortero); (4) se disminuye la luz de la cercha que ha de sostener el arco durante la construcción. Este efecto se ha representado en la Figura 8.19. El dibujo no está exagerado y las esbelteces del arco se han tomado de la Figura 8.18 (están allí señaladas); las del contrafuerte se han obtenido por cálculo.

Otro efecto favorable se consigue cargando los riñones del arco. Sin embargo, como puede apreciarse en la Figura 8.19, en este caso la ganancia no es tan espectacular.

En la práctica, lo habitual era combinar ambos procedimientos: el arranque de los contrafuertes se levantaba un poco (normalmente hasta un tercio) y luego se cargaban los riñones con material de relleno hasta la mitad o los

dos tercios de la flecha. Como puede verse no es necesario dar reglas muy precisas y cualquier acción del tipo de las descritas se traduce en una mejora inmediata de la estabilidad del sistema arco-contrafuerte. En la Segunda Parte hemos recogido las constantes advertencias sobre la conveniencia de cargar los riñones y levantar los contrafuertes (véase en particular Alberti y Fray Lorenzo).

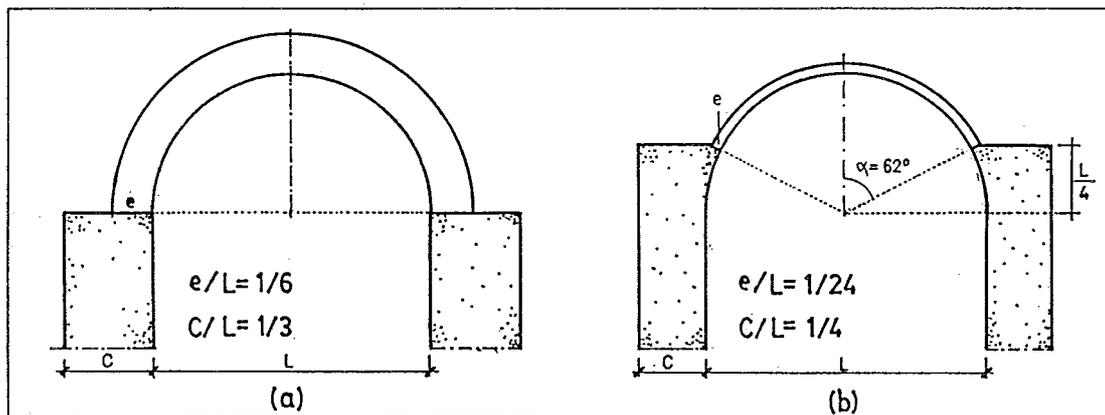


Figura 8.19. Efecto de levantar los contrafuertes hasta la mitad de la flecha

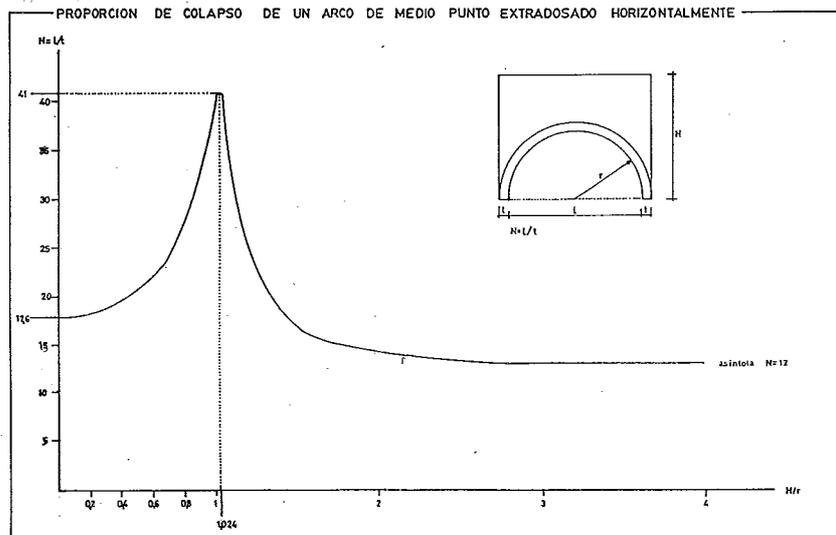


Figura 8.20. Esbeltez límite de un arco semicircular: efecto del relleno

Es interesante señalar la diferencia entre esta forma de plantear el problema y lo que podríamos llamar un enfoque "moderno". Un analista estructural moderno a la hora de diseñar un arco haría coincidir su directriz con la línea de empujes de las cargas permanentes (forma catenaria); esto conduciría,

quizá, a un menor consumo de material, pero no a un menor coste, dado el difícil replanteo y la laboriosa talla de las dovelas, con saltareglas distintas para cada una de ellas.

El procedimiento seguido por los antiguos maestros es el siguiente: se toma como directriz del arco una curva de fácil replanteo y talla (generalmente formada por arcos de círculo), y, posteriormente, se carga este arco de forma que la línea de empujes se acerque lo más posible a la directriz. Esto se traduce, como hemos visto, en una reducción drástica en su esbeltez límite.

El concepto asociado a esta enfoque es el de *línea de carga*: dada una forma de la directriz del arco, recibe este nombre la línea que limita la carga que produciría una línea de empujes que coincidiera con la directriz⁴⁶.

En las Figura 8.21 aparecen dibujadas las líneas de carga para los tres tipos básicos de arcos más arriba mencionados. Por supuesto, el Teorema de la Proyección Paralela de Rankine se puede aplicar también: la línea de carga de la proyección paralela de un arco será la proyección paralela de su línea de carga.

Las conclusiones son evidentes:

- para estabilizar los arcos de medio punto y rebajados, es preciso cargar los riñones.
- para estabilizar los arcos apuntados hay que cargar la clave y los riñones simultáneamente.

46. La primera mención general a los beneficios de cargar adecuadamente un arco corresponde a La Hire (véase Introducción, pág. 3). El problema fue estudiado con frecuencia en el siglo XVIII y comienzos del XIX, dentro de la teoría del arco formado por dovelas sin rozamiento. Los ingenieros franceses de forma muy teórica; los ingleses con vistas a su aplicación práctica: véase, por ejemplo, J. Gwilt, *Joseph A Treatise on the Equilibrium of Arches, in which the theory is demonstrated upon familiar mathematical principles*. 3rd Ed. London: John Weale, 1839 (primera ed. 1811). La primera formulación precisa, así como la aparición del término, *Belastungslinie*, corresponde, creemos a Schwedler en su memoria: "Theorie der Stützlinie. Ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bögen." *Zeitschrift für Bauwesen*, Vol. 9, 1859. col. 109-126. Para un estudio exhaustivo, con ensayos sobre modelos véase: F. Heinzerling, "Die Bauwaage und deren Ergebnissen für den Gewölbebau." *Zeitschrift für Bauwesen*, Vol. 19, 1869. cols. 89-110, 9 figs., 2 láms.

- los arcos rebajados son siempre más estables y conducen a esbelteces límites inferiores.

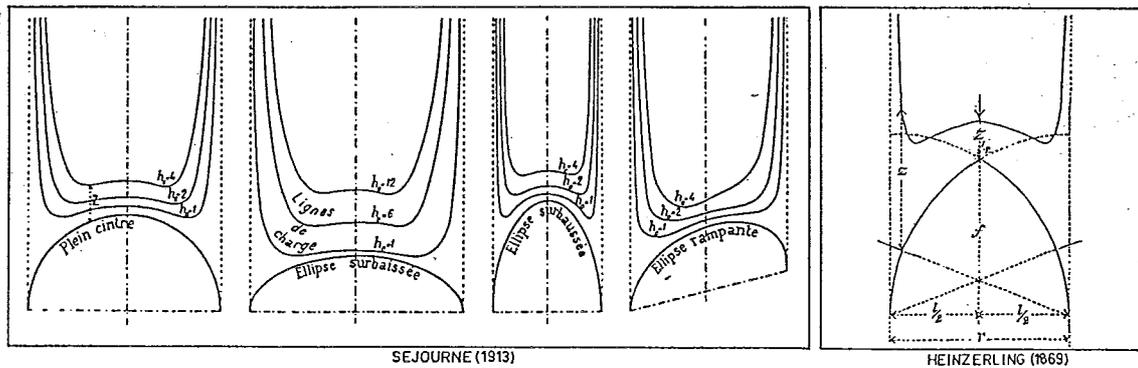


Figura 8.21. Líneas de carga de distintos tipos de arcos

Este hecho, de importancia capital para comprender el modo de edificar de nuestros predecesores, parece haber escapado a la atención de la mayoría de los historiadores de la construcción y de las estructuras.

Por ejemplo, en la abundante literatura sobre el funcionamiento de las estructuras góticas apenas se menciona o se ignora por completo, la necesidad de cargar las claves en los arcos apuntados, que se deduce claramente de la forma de su línea de carga (véase Figura 8.21)⁴⁷. Solamente hemos encontrado dos referencias en las que se alude explícitamente a esta manera de proceder (véanse las Figuras 7.1. y 8.22.)⁴⁸.

De hecho, siguiendo estas normas constructivas simples, el espesor de las bóvedas puede reducirse al mínimo constructivo de 1 pie, como lo confirman los métodos de medición empleados que medían las bóvedas en pies cuadra-

47. Viollet en su estudio sobre las bóvedas y arcos góticos ignora por completo este tema. Véase su *Dictionnaire raisonné de l'Architecture Française du XI au XVI siècle*. Vol. 4. Paris: 1868, págs. 1-208. Paul Abraham *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*. Paris: 1934, que realiza una discusión completa del funcionamiento de las estructuras góticas tampoco lo menciona. Lo mismo ocurre con las distintas memorias de Mark, Heyman, Cowan, etc., citadas en el apartado C.3.3 de la Bibliografía.

48. E. Hatzel, "Über die Technik in spezieller Beziehung auf die Architektur und die Gestaltung der Formen." *Allgemeine Bauzeitung*, 1849. pp. 132-169; y G. C. Ungewitter y K. Mohrmann, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*. 2 vols. Leipzig: 1890.

quizá el ingeniero más genial de su época:

To determine with precision the depth required for the keystone of an arch by direct deduction from the principles of stability and strength, would be an almost impracticable problem from its complexisty.

El único camino en este caso consistió en deducir una regla empírica a partir de ejemplos construidos de puentes. Este método fue el seguido por Gautier, Bélidor y Perronet en el siglo XVIII, como hemos visto en la Segunda Parte de esta Tesis. Durante todo el siglo XIX y comienzos del XX, con la teoría del arco de fábrica enteramente desarrollada, el enfoque es el mismo; así, los principales tratados recogen listas de puentes con sus dimensiones y tratan de inferir a partir de éstas reglas de diseño⁵⁰. El único intento de buscar una justificación racional corresponde a Rankine⁵¹.

En cualquier caso, el espesor depende en la mayoría de los casos de consideraciones de rotura y es siempre superior por un factor considerable (Rankine lo estima en base a ejemplos construidos entre los límites de 3 y 70, normalmente entre 20 y 40⁵²) al que sería necesario por consideraciones de resistencia. Para una comparación entre distintas reglas véase la Figura 8.10. más arriba, o las obras citadas de Dupuit y Croizette-Desnoyers..

8.2.6 Reglas sobre contrafuertes

Hemos visto que es relativamente sencillo construir un arco estable, o, mejor dicho, estabilizar un arco dado. Sin embargo, cualquier arco produce un cierto empuje que debe ser resistido por los contrafuertes. Si éstos son

49. W. J. M. Rankine, *A Manual of Civil Engineering*. 2a. Ed. London: Charles Griffin and Company, 1863, pág. 425.

50. Véase, por ejemplo, J. Dupuit, op. cit., Cap. VII "De l'épaisseura donner aux voûtes...", págs. 169-197; W. J. M. Rankine, *A Manual of Civil Engineering*, op. cit., pág. 426; P. Croizette Desnoyers, *Cours de construction des ponts*. Paris: 1885, Vol. 2, págs. 1-22; y P. Sejourné, op. cit., págs. 342-44.

51. Rankine, op. cit., pág. 427.

52. Rankine, op. cit., pág. 425.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

insuficientes giran alrededor de sus aristas inferiores y se produce el colapso del conjunto, aunque el arco se en sí mismo estable. De ahí la importancia fundamental de los contrafuertes.

Esta importancia viene confirmada por la abundancia de reglas para dimensionar los contrafuertes de los arcos. Las más sencillas dan el contrafuerte como una fracción simple de la luz y son independientes de la forma del arco, de su canto y de la altura de los arranques. Las más elaboradas tienen en cuenta estos factores.

Existe una cierta confusión en cuanto al ámbito de aplicación de estas reglas. ¿Servían para calcular el contrafuerte de un arco ó, dada la sección de una bóveda (de crucería o de cañón) determinar los contrafuertes correspondientes espaciados una determinada distancia? Este aspecto no queda muy claro en algunos casos: las reglas de Martínez de Aranda, Hernán Ruiz y Rodrigo Gil, parece que se aplicaban en ambas situaciones (véanse en la Segunda Parte los apartados correspondientes).

Comprobaremos ahora la posible validez de las reglas en cuanto al problema que nos ocupa: arco sobre contrafuertes, suponiendo ambos del mismo ancho.

8.2.6.a Reglas 1 y 2 de Rodrigo Gil

En este caso Rodrigo Gil (véase apartado 5.2.7) daba la altura de carga sobre los arcos lo que permite una verificación específica. Esto es interesante por cuanto, como vimos, la construcción parece fijar las proporciones de una estructura construida o de un ensayo sobre modelos. En las Figuras 8.23. y 8.24. se ha realizado un estudio de su estabilidad empleando el método de Fuller/Heyman.

Si bien ambas construcciones son estables, están muy cerca de la situación de colapso, como puede apreciarse por la posición de las líneas de empu-

jes. Podemos suponer, por tanto, que Rodrigo Gil fijó el ancho de los contrafuertes y fue aumentando la carga hasta que se produjo el colapso. La seguridad se obtendría, en esta hipótesis, simplemente reduciendo el nivel de la carga (véase la observación de Rodrigo Gil en la página 122). El ensayo, sobre todo si se hace a pequeña escala puede ser engañoso ya que la estructura está muy cerca de la configuración de colapso.

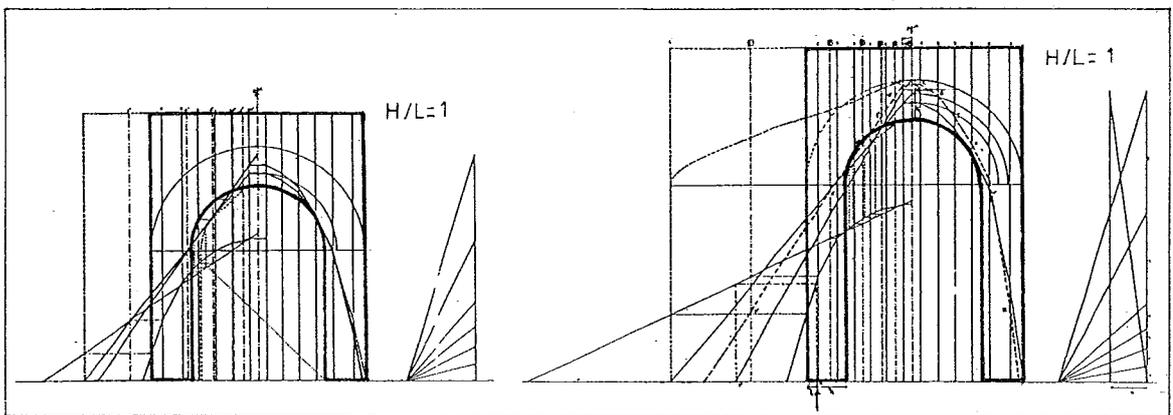


Figura 8.23. Verificación de la Regla n°1 de Rodrigo Gil

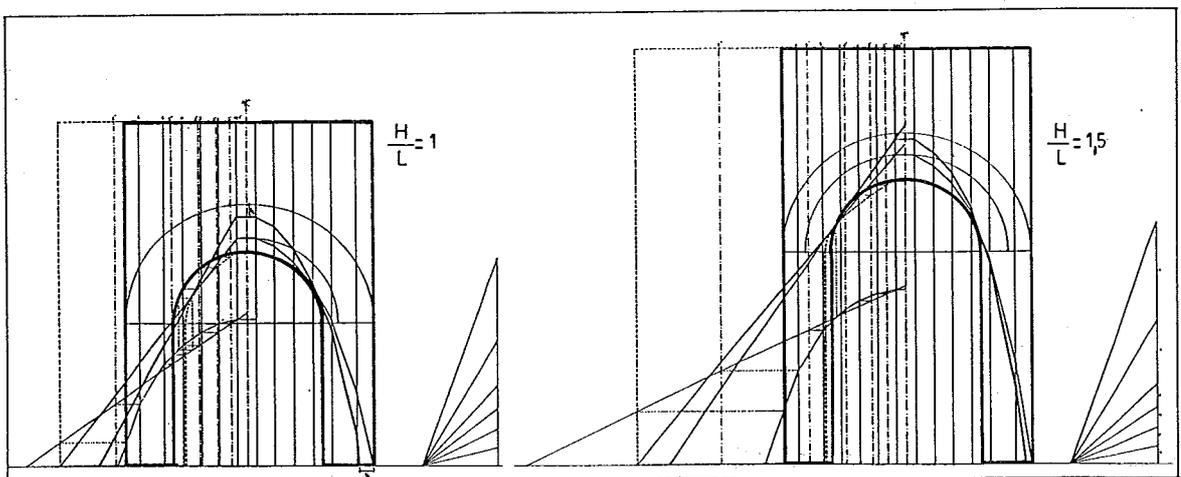


Figura 8.24. Verificación de la Regla n°2 de Rodrigo Gil

8.2.6.b Contrafuerte para cualquier arco

La mayor preocupación tanto de Rodrigo Gil como de los otros arquitectos e ingenieros que se ocuparon del tema era encontrar una regla que diera el contrafuerte para cualquier tipo de arco. En el inventario que hemos realizado aparecen cuatro reglas que permiten obtener el contrafuerte para cualquier tipo de arco; se trata de las reglas nº4 de Rodrigo Gil, de Martínez de Aranda, de Hernán Ruiz y de Plo y Camín.

Para tratar de conocer su grado de validez hemos calculado los contrafuertes para 11 arcos con distintas relaciones F/L (flecha/luz). Para $F/L > 0.5$, los arcos son apuntados con los centros sobre la línea que una los arranques. Para $F/L < 0.5$, los arcos son rebajados, en arco de círculo, con su centro de curvatura sobre su eje de simetría. Los riñones se suponen macizados con buena cantería hasta el tercio de la flecha. La esbeltez (relación canto/luz) del arco se supone constante e igual a $1/15$. Este valor corresponde al arco de directriz circular supuesto empotrado a la altura del tercio. Tanto los arcos apuntados como rebajados podrían tener, como hemos visto, una esbeltez menor. Para simplificar hemos mantenido constante esta relación canto/luz. La serie arcos considerada está dibujada en la Figura 8.25. Los distintos arcos están numerados.

Para cada arco se ha calculado la relación C/L (canto del contrafuerte/luz) para dos alturas H diferentes: $H = L$ y $H = 1.5 * L$. En la gráfica de la Figura 8.26. se han dibujado los puntos correspondientes en ambos casos para la situación de colapso, considerando un coeficiente de seguridad respecto al vuelco de 2.

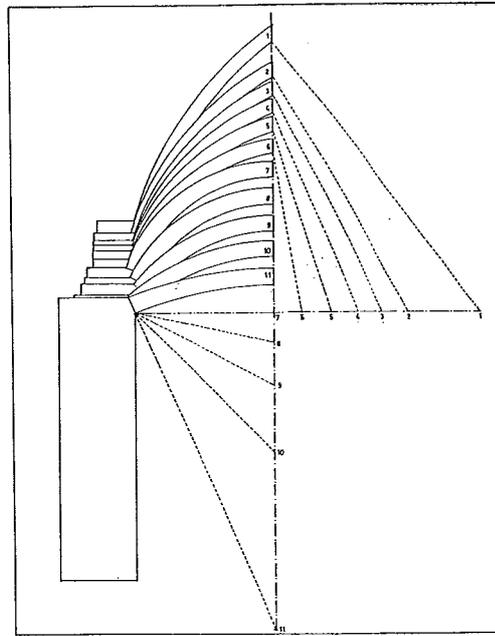


Figura 8.25. Geometría de la serie de arcos considerada

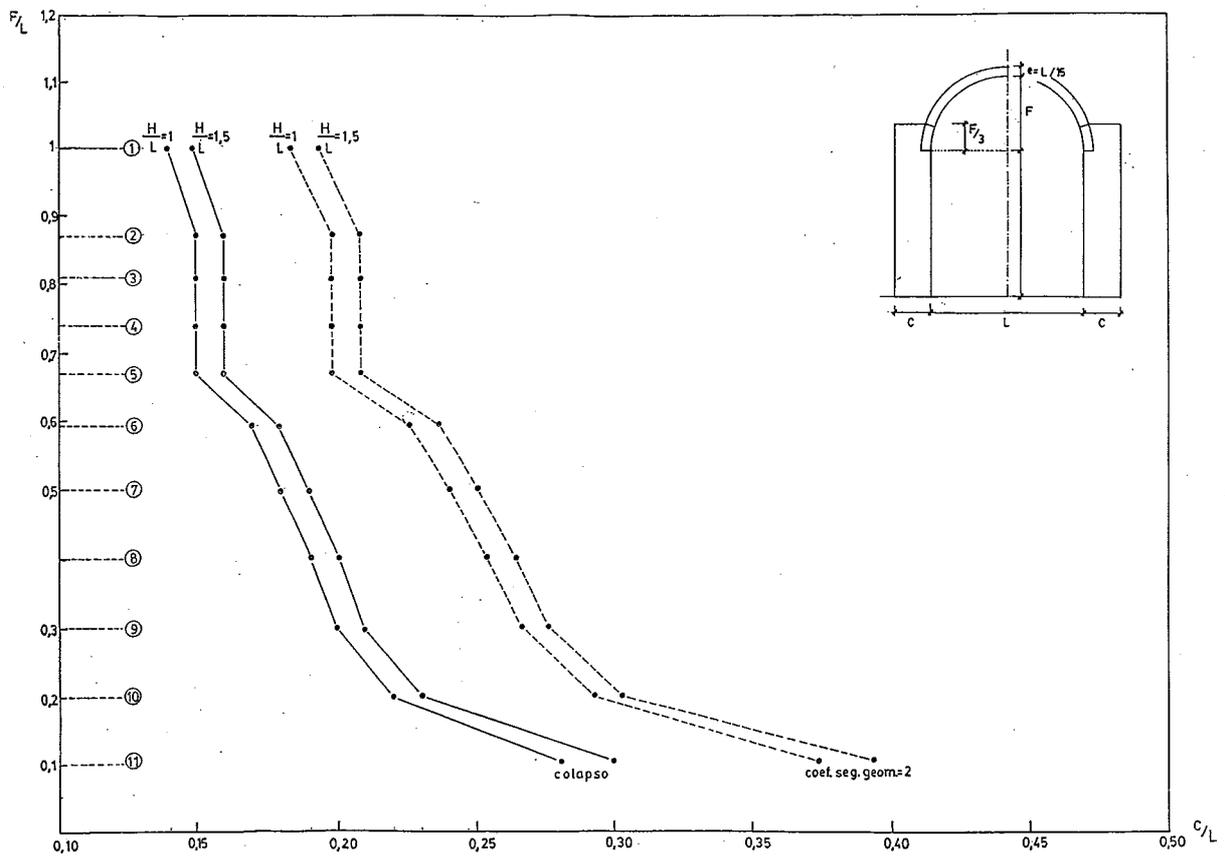


Figura 8.26. Esbeltez del contrafuerte para distintos arcos

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

En la siguiente gráfica, Figura 8.27., hemos comparado las esbelteces obtenidas por el cálculo con las deducidas de mencionadas reglas: (a) reglas de Martínez de Aranda; (b) regla de Hernán Ruiz; (c) regla n°4 de Rodrigo Gil y (d) regla de Plo y Camín. Las dos primeras se ajustan bastante bien a la curva obtenida por el cálculo; las dos últimas presentan un grado de seguridad excesivo, lo que hace suponer que se apliquen al problema de las bóvedas de cañón seguido con contrafuertes a intervalos.

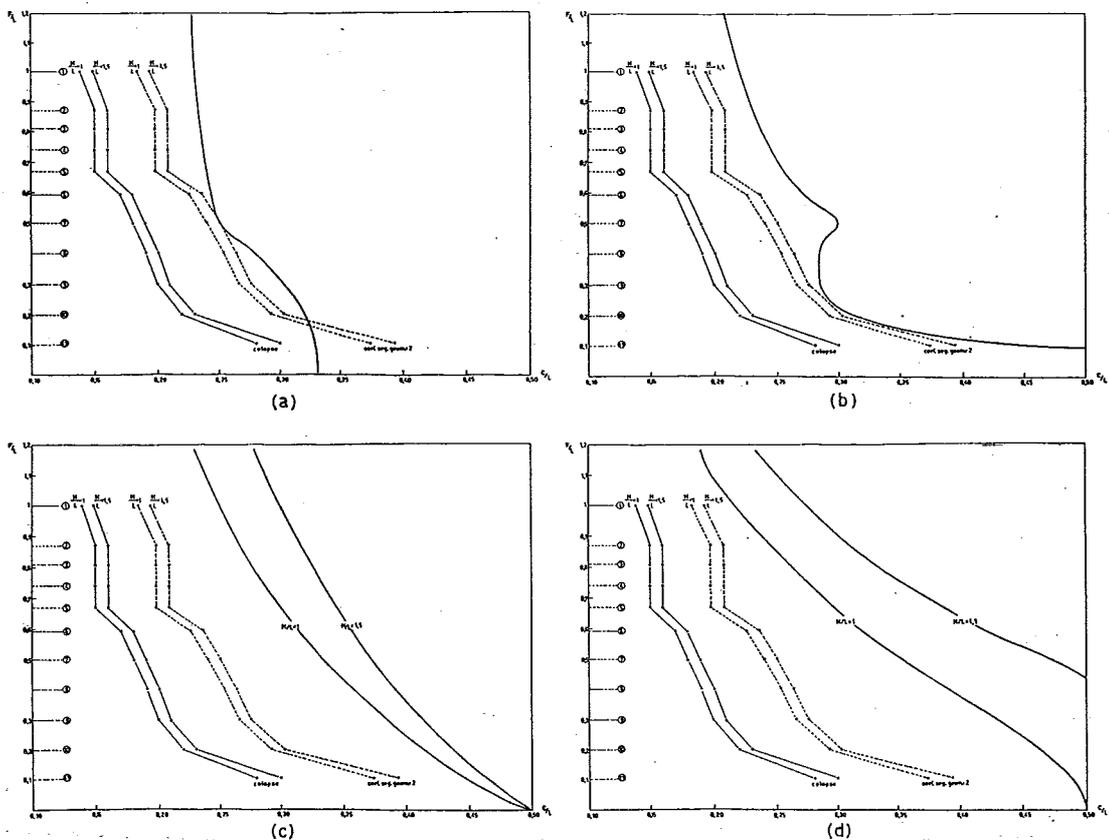


Figura 8.27. Verificación de las reglas para el contrafuerte de un arco. (a) regla de Martínez de Aranda/Derand; (b) regla de Hernán Ruiz; (c) regla n°4 de Gil de Hontañón; (d) regla de Plo y Camín. Las dos últimas son función de la altura.

Para el problema del contrafuerte para un arco (ambos del mismo espesor), la confianza depositada a lo largo de los siglos, en particular, en la regla de Martínez de Aranda, parece justificada. De hecho, la regla aparece citada todavía como un método válido para arcos no muy grandes en numerosos tratados de construcción de finales del siglo XIX y comienzos del XX, en

particular en dos de enorme difusión, los de Barberot⁵³ y Esselborn⁵⁴.

En las siguientes gráficas se ha estudiado la posible influencia del espesor para el caso de los arcos de medio punto, exentos (Figura 8.28) o extradosados horizontalmente al nivel de la clave (Figura 8.29), para el caso de una relación H/L (altura del contrafuerte/luz) de 1.5. Como puede apreciarse la regla de Martínez de Aranda funciona incluso para esbelteces de arco demasiado grandes. La regla n°4 de Rodrigo Gil sigue resultando demasiado conservadora.

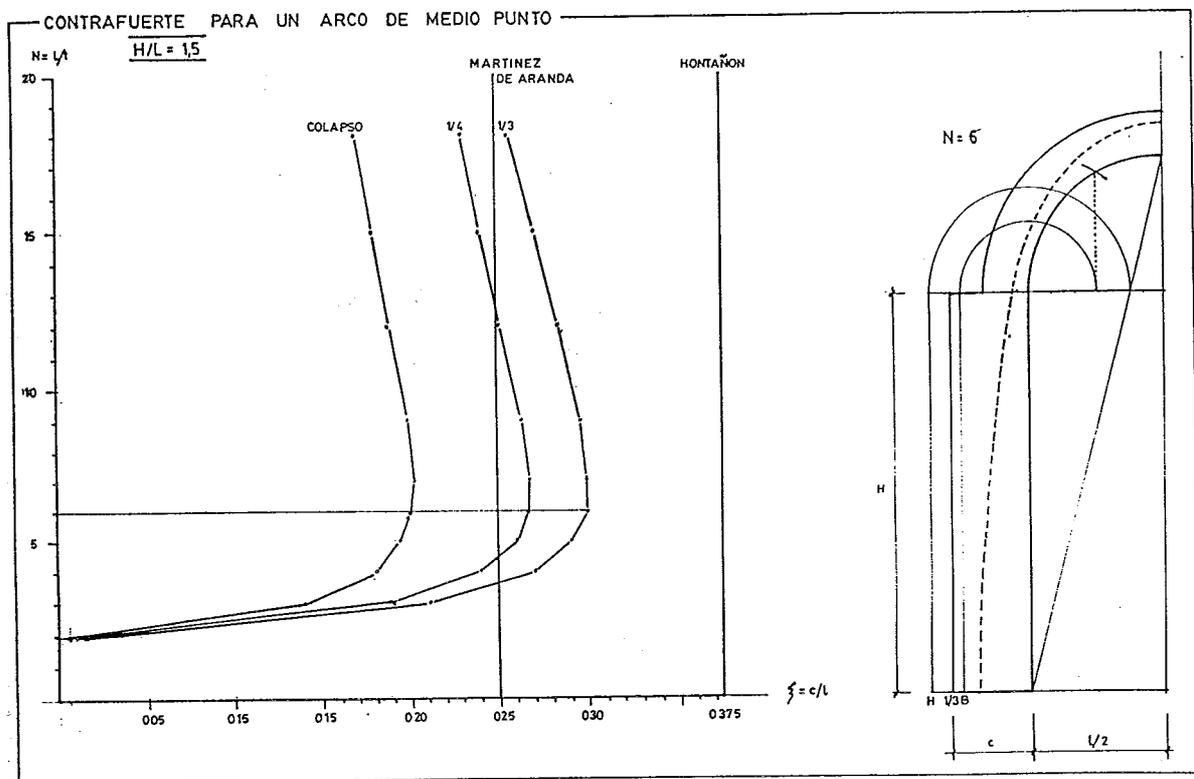


Figura 8.28. Contrafuerte para un arco de medio punto exento

53. E. Barberot, *Traité des Constructions Civiles*. Paris: Librairie Polytechnique, 1895, págs. 91-97.

54. C. Esselborn, *Tratado General de Construcción*. Barcelona: Gustavo Gili, 1928. Cita la regla en dos partes: Vol. I, pág. 140, y Vol. II, pág. 226, donde dice: "Este procedimiento sirve lo mismo para el arco de medio punto románico que para el gótico primitivo poco elevado o para el ojival muy empinado de la época posterior; da el mayor espesor para el arco de medio punto y va disminuyendo, cuanto más empinado sea, en el arco ojival. El cálculo no da otro resultado." (el subrayado es mío).

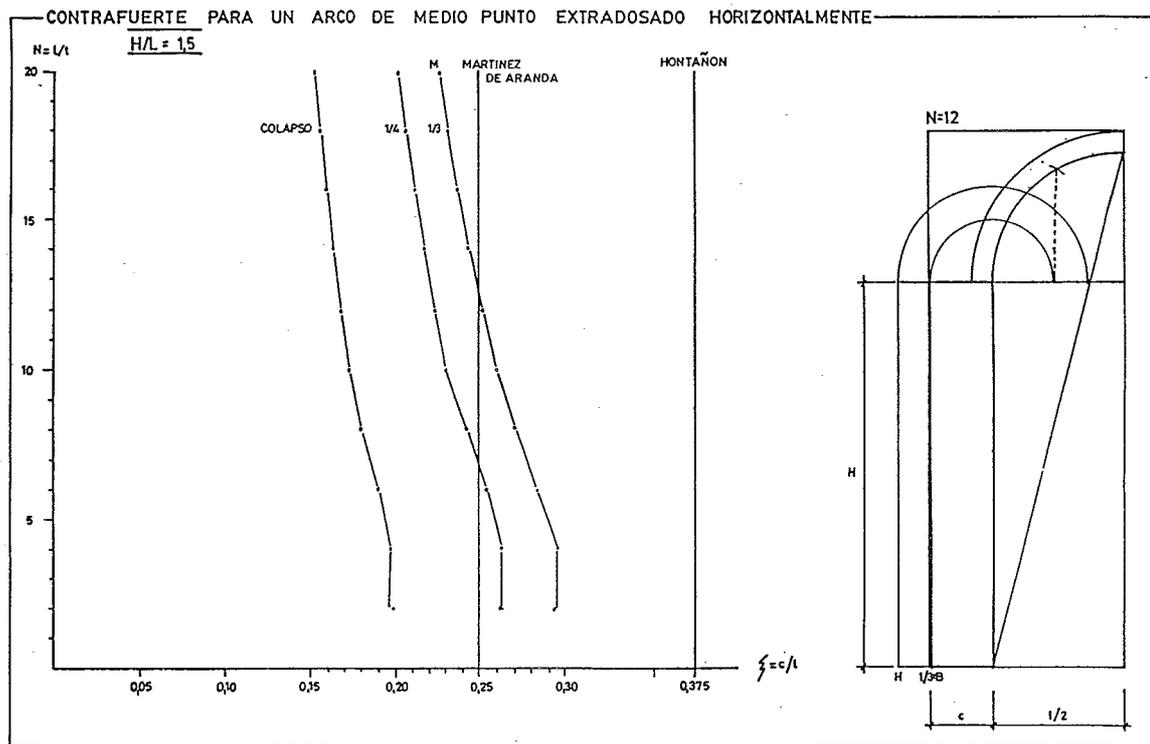


Figura 8.29. Contrafuerte para un arco de medio punto: relleno horizontal

8.2.6.c Contrafuerte para una bóveda de cañón

Podemos distinguir para este caso dos posibilidades: (a) el contrafuerte es de sección constante a todo lo largo de la bóveda (se trata en realidad de un muro): estamos en el caso anterior; (b) se emplean los contrafuertes propiamente dichos, es decir, cuerpos que sobresalen de la sección del muro a intervalos dados.

El segundo caso es el más corriente y es el que pasamos a estudiar. Para ello, lo más cómodo es referir el canto del contrafuerte con su correspondiente muro al de un contrafuerte 'equivalente' de sección uniforme. Este es el enfoque propuesto por Rankine en su *Manual of Applied Mechanics*.⁵⁵

55. Op. cit., págs. 255-256.

Dado que nosotros conocemos los contrafuertes para cada tipo de arco, procederemos a la inversa y hallaremos en función de éstos los contrafuertes para una geometría dada. Esto es sencillo pues los momentos de estabilidad están, aproximadamente, en función inversa de los momentos de inercia⁵⁶.

En las Figuras 8.30 y 8.31 hemos representado los valores de la esbeltez del contrafuerte (con un coeficiente de seguridad contra el vuelco de 2) para dos valores de H/L , 1 y 1.5, y dos valores de K (relación entre la longitud del tramo entre contrafuertes y la luz), y hemos comparado estos valores con la regla n°4 de Rodrigo Gil y la de Plo y Camín que, como vimos en el apartado anterior, daban valores excesivos para el muro de sección constante.

Como puede apreciarse en esta hipótesis el ajuste es bastante bueno, para el intervalo de relaciones flecha/luz usuales en este tipo de bóvedas ($F/L < 0.5$). La regla del tercio de Palladio, Fray Lorenzo, etc., solamente funciona para bóvedas de medio punto.

Sin embargo, hay que matizar que los valores de esbeltez del contrafuerte obtenidos van del lado de la seguridad por los siguientes motivos: (a) normalmente el contrafuerte se prolonga hasta más arriba de la altura de la clave de la bóveda (y no sólo hasta el tercio como hemos supuesto nosotros), para que las armaduras de cubierta apoyen de muro a muro; (b) el relleno en estos casos suele realizarse hasta los $2/3$ (véase Alberti, Fray Lorenzo, etc...); (c) la esbeltez de $1/15$ es excesivamente conservadora en las condiciones mencionadas (por ejemplo, la bóveda de medio punto de S. Pedro de Roma presenta una esbeltez de $1/24$). No obstante, la conclusión es clara: las reglas de Rodrigo Gil y Plo y Camín, pueden usarse con confianza casi para cualquier directriz; la regla del tercio funciona bien para bóvedas de medio punto o poco rebajadas, como es el caso habitual a partir del Renacimiento.

56. Véase Rankine, op. cit., págs. 263-264.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

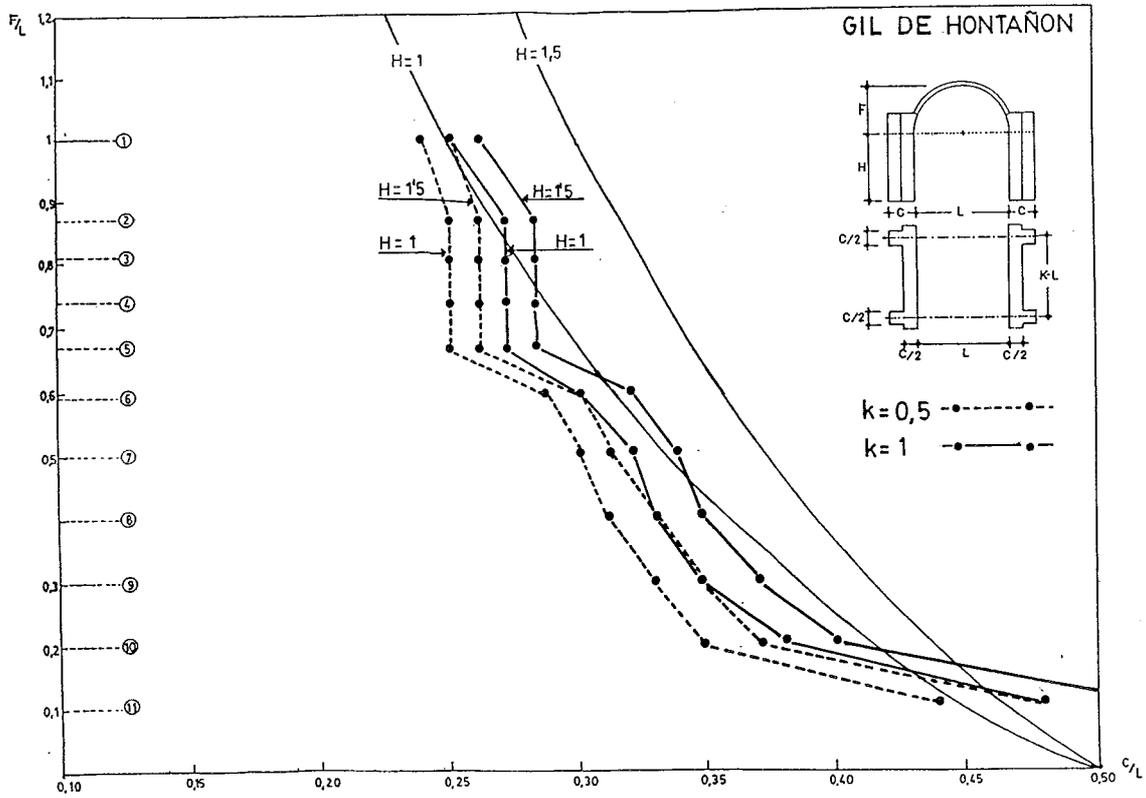


Figura 8.30. Bóveda de cañon con estribos: validez de la regla de Rodrigo Gil

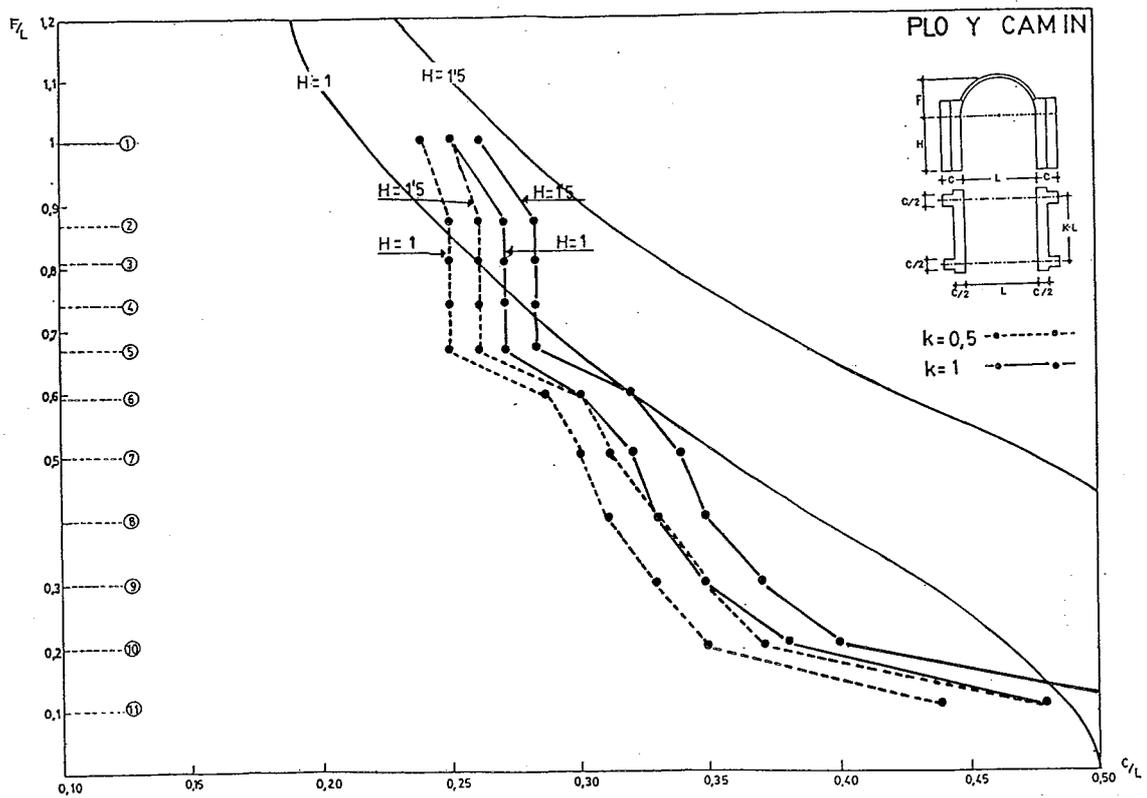


Figura 8.31. Bóveda de cañon con estribos: validez de la regla de Plo y Camín

8.3 Bóvedas de fábrica

Agrupamos bajo la denominación de "bóvedas" todas las estructuras arqueadas espaciales. Heyman⁵⁷ ha demostrado que los Teoremas Fundamentales del Análisis a rotura pueden aplicarse también a este tipo de estructuras, siempre que se verifiquen las hipótesis básicas correspondientes (véase apartado 4.3). En particular es de especial utilidad el primer Teorema o Teorema del Límite Inferior: si es posible encontrar una situación de equilibrio 'satisfactoria'⁵⁸ para la estructura, ésta es completamente segura. La importancia fundamental radica en que el estado de equilibrio encontrado no necesita ser el estado 'real'; solamente es preciso encontrar una posible situación de equilibrio para poder afirmar que la estructura es segura.⁵⁹

Este Teorema justifica la aplicación del 'método de los cortes' para el análisis a rotura de este tipo de estructuras. El procedimiento consiste en imaginar la estructura 'rota', descompuesta en un sistema de arcos, y estudiar la estabilidad de este sistema de arcos, lo que puede hacerse fácilmente empleando las técnicas descritas en el apartado 4.5.

Este método fue empleado desde el siglo XVIII para el análisis de las bóvedas compuestas de fábrica (véase Introducción). Así pues, como en el caso de los arcos, la demostración de los Teoremas Fundamentales del Análisis a Rotura da carta de validez a un procedimiento utilizado, con éxito, durante más de 200 años. Podemos, pues, aprovechar los análisis y observaciones realizados por los arquitectos e ingenieros, fundamentalmente del siglo pasado, para sacar conclusiones sobre la estabilidad de las bóvedas compuestas.

57. Para una discusión completa del problema general y sus relaciones con la teoría de la membrana, véase J. Heyman, *Equilibrium of Shell Structures*. Oxford: Clarendon Press, 1977.

58. Por 'satisfactoria' se entiende que es compatible con las hipótesis básicas sobre el comportamiento del material: (a) el nivel de tensiones de compresión es bajo; (b) el material no resiste tracciones.

59. Heyman, op. cit., págs. 71-72.

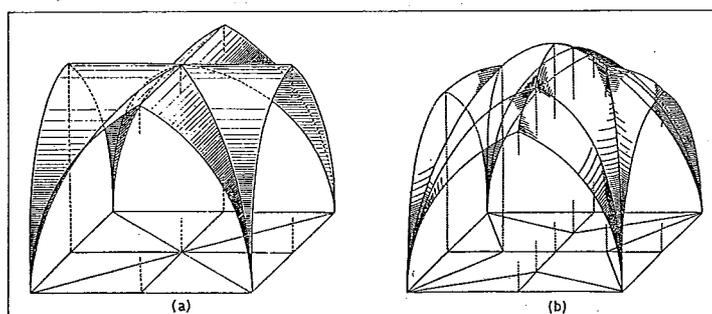
Estudiaremos a continuación, por separado, los dos tipos más importantes, la bóveda de crucería y la cúpula, con vistas a sacar conclusiones sobre las reglas empíricas de diseño.

8.3.1 Bóvedas de crucería y sus contrafuertes

Al estudiar la estabilidad de la bóveda de crucería hay que distinguir entre: (a) la estabilidad de la bóveda en sí misma sobre sus arranques; (b) la estabilidad de los contrafuertes sometidos al empuje de la bóveda (supuesta estable). Consideraremos ambos aspectos por separado.

8.3.1.a Bóvedas: estabilidad y construcción

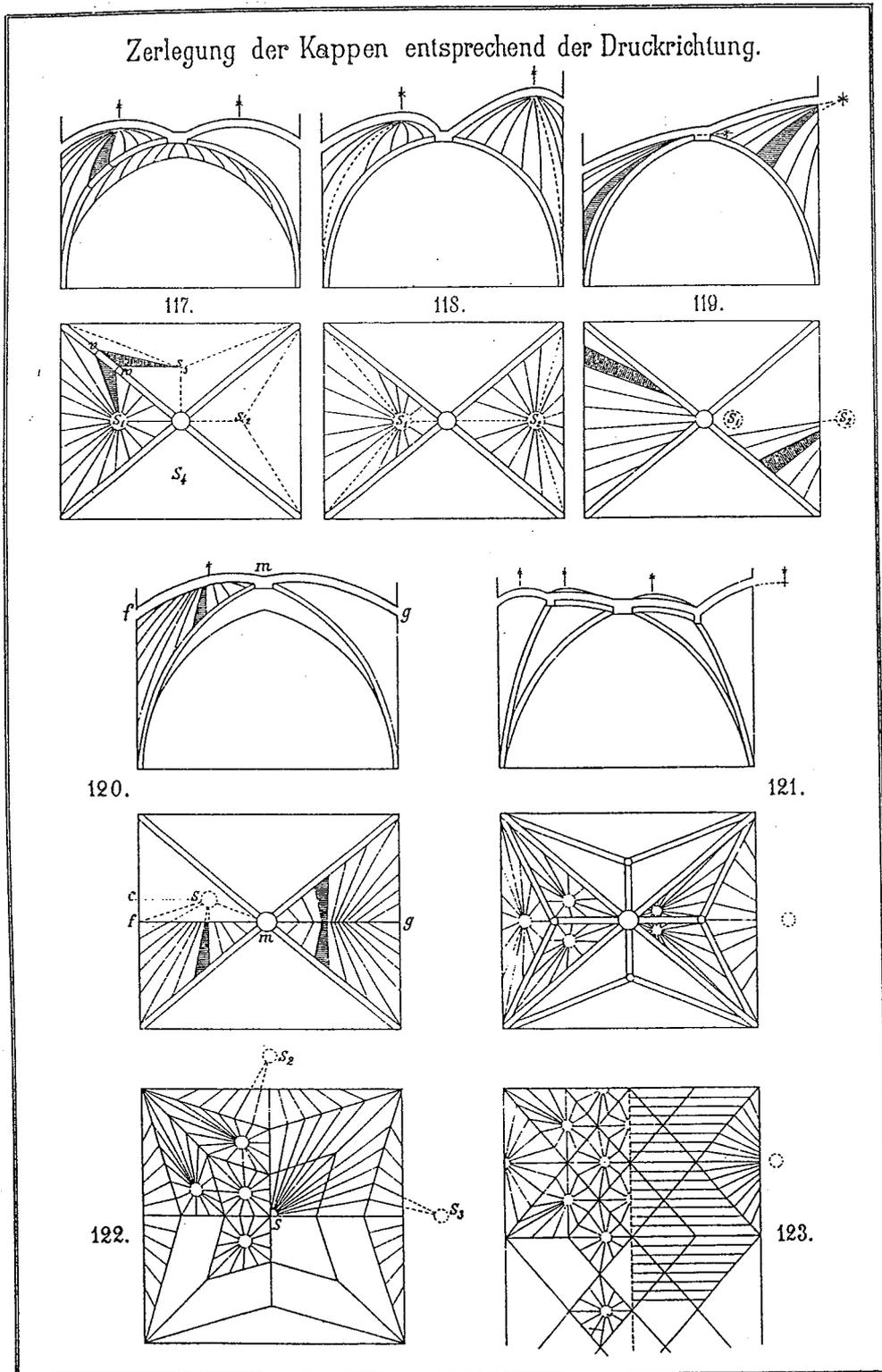
Para calcular la estabilidad de una bóveda de crucería es preciso, como es natural, definir completamente su geometría, es decir, la forma y dimensiones de los elementos que la componen: nervios, claves y plementería. Para reducir los cálculos normalmente se supone una geometría simplificada, del tipo de la representada en la Figura 8.32. (a). La bóveda se forma por la intersección de dos superficies cilíndricas perfectas y se ignora la presencia de claves y nervios. La práctica totalidad de los estudios de estabilidad de las bóvedas de crucería parten de estas simplificaciones.⁶⁰



WARTH (1903)

Figura 8.32. Posibles formas de bóvedas de crucería

60. Véase, por ejemplo: Kobell, "Beitrag zur Statik der Gewölbe." *Allgemeine Bauzeitung*, , 1855. pp. 92-110; W. Wittmann, "Zur Theorie der Gewölbe." *Zeitschrift für Bauesen*, Vol. 29, 1879. cols. 61-74; K. Körner, *Gewölbte Decken (Handbuch der Architektur. Dritter Teil. 2 Band. Heft 3, b)* Stuttgart: Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung, 1901; y J. Heyman, op. cit., págs. 117-131.



UNGEWITTER/MOHRMANN (1890)

Figura 8.33. Curvatura de las plementerías en las bóvedas de crucería

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

Sin embargo, la geometría de las bóvedas de crucería se parece, en general, más a la representada en la Figuras 8.31.(b) y 8.32 (véase más arriba). Hay que observar, además, que la superficie de las plementerías no sigue la curvatura general definida por la geometría de los nervios, sino que presentan una pequeña curvatura propia entre ellos (véase Figura 8.32)⁶¹. Por otro lado el peso y las dimensiones de claves y nervios son comúnmente del mismo orden que el peso de la plementería y deberían ser tenidos en cuenta en el análisis.

La justificación del tipo de estructura que se deduce de las anteriores observaciones, un entramado de nervios y claves, cuyos espacios intermedios están cubiertos por pequeñas bóvedas rebajadas, se deduce, creemos de motivos puramente constructivos. La descripción del proceso de construcción de una bóveda baída nervada realizada por Rodrigo Gil⁶² confirma esta hipótesis.

En primer lugar se construye el entramado de nervios (sobre unas cerchas) y claves (sujetas con tornapuntas). Después se cubren los espacios entre los nervios con las plementerías. En todo este proceso hay que destacar dos aspectos: (1) el sistema tiene que ser estable no solamente al final sino en todos los pasos intermedios de la construcción; (2) los plementos al salvar pequeñas distancias con superficies de doble curvatura y pequeña flecha sólo precisan tener de espesor el mínimo constructivo (1/2 pie de ladrillo; en torno a los 15 cm en piedra).

El primer aspecto es, pues, el más crítico y determina las dimensiones de nervios (éstos concluida la construcción resultan prácticamente innecesarios⁶³) y claves. Es revelador en este sentido que, mientras que Rodrigo Gil

61. Frézier ya había llamado la atención sobre este importante aspecto. Véase más arriba págs. 263-266.

62. Véase página 109 más arriba.

63. De hecho en los nervios, debido a la discontinuidad de curvatura, aparece un incremento brusco de las tensiones que es un orden de magnitud superior al presente en las plementerías. Sin embargo, el nivel, en general, sigue siendo bajo y el propio espesor de la plementería podría absorber este incremento. Heyman ha

da un conjunto de reglas que definen completamente las dimensiones de nervios y claves, no cita en absoluto las dimensiones de las plementerías.

La verificación de las reglas de Rodrigo Gil sobre nervios y claves sería, por lo tanto, extraordinariamente complicada, habiendo que calcular todos los estados intermedios de carga hasta el cierre completo de la bóveda. Lo más sencillo quizá podría ser un ensayo sobre un modelo de escala suficiente o participar en la construcción de una bóveda de este tipo. Aunque Rodrigo Gil advierte:

... estas cosas podran ser difiçiles de comprender faltando en quien las procura la experien-
cia, la practica, la profesion de la canteria, y la execucion, o el aberse allado presente
a algunos çierres de cruçeria, para haçerse capaz en el asiento de ella...⁶⁴

Efectivamente, el proceso completo seguramente impondría un cierto orden en la ejecución de las plementerías que iría, posiblemente, acompañado de un cierto 'aflojamiento' de cimbras y tornapuntas para ir modificando a voluntad la estabilidad del conjunto.

8.3.1.b Contrafuertes: cálculo, y verificación de reglas empíricas

El problema del cálculo de los contrafuertes que precisa un bóveda de crucería es considerablemente más sencillo que el de la estabilidad de la propia bóveda. Para analizar el empuje de la bóveda podemos seguir dos caminos.

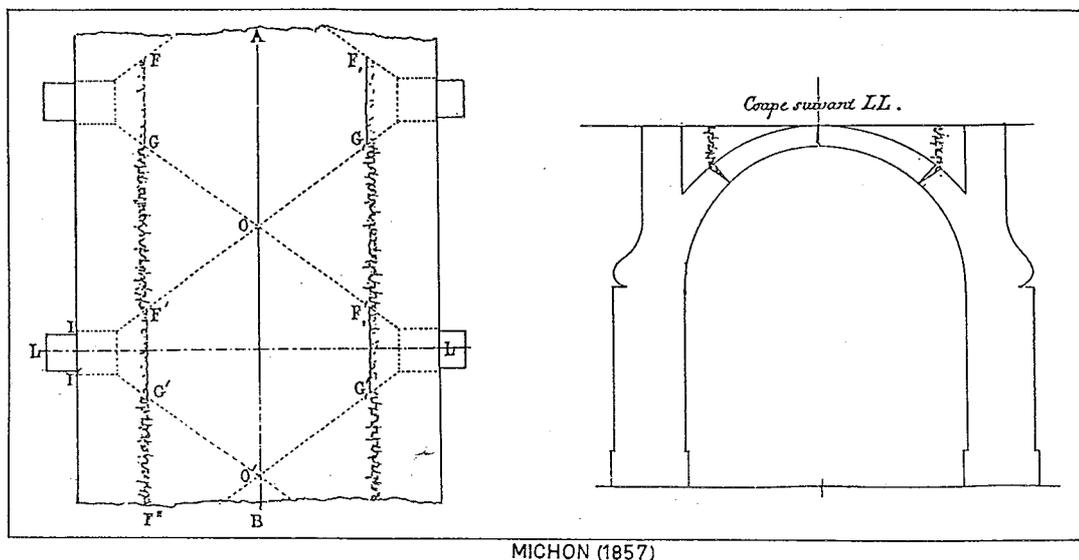
El primero y el más utilizado durante finales del siglo XIX consiste en dividir la bóveda en una serie de arcos, supuestos por ejemplo apoyados sobre los cruceros, calcular el empuje de cada uno de ellos sobre los mencionados arcos cruceros y encontrar la línea de empujes correspondiente. Este método

discutido este tema con detalle en: "On the Rubber Vaults of the Middle Ages and Other Matters." *Gazette des Beaux-Arts*, Vol. 71, 1968. pp. 177-188.

64. Véase pág. 109, más arriba.

supone una cierta complicación, aunque no excesiva.⁶⁵

El segundo consiste en imaginar el colapso de la bóveda considerada en su conjunto. Este fue propuesto por primera vez por Michon⁶⁶ y fue empleado por Mohrmann⁶⁷ para calcular las primeras tablas de contrafuertes para bóvedas de crucería; las hipótesis básicas han sido recientemente discutidas por Heyman⁶⁸ en el marco del moderno análisis a rotura. Este método es más sencillo y permite un conocimiento más global del comportamiento de la estructura y de las variables fundamentales que lo condicionan. Lo describimos a continuación.



MICHON (1857)

Figura 8.34. Colapso de una bóveda de crucería

Supongamos una serie indefinida de bóvedas de crucería del tipo de la representada en la Figura 8.34. Dado que las bóvedas están en equilibrio en el sentido de la nave, la rotura por rotación de los contrafuertes solamente

65. Véase nota 57 más arriba.

66. Michon, *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*. Metz: lithographie de l'École de Metz, 1857, págs. 40-42.

67. G. C. y K. Mohrmann, *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage*. Leipzig: T.O. Weigel Nachfolger, 1890, Vol. 1, págs. 133-153.

68. J. Heyman, "Chronic Defects in Masonry Vaults: Sabouret's Cracks." *Monumentum*, Vol. 26, 1983. pp. 131-141; "Poleni's problem.", *Proceedings of the Institution of Civil Engineer's*, Part 1, Vol. 84, 1988, págs. 737-759.

podrá producirse por la formación de dos grietas longitudinales, una en la clave y otra cerca de los arranques de la bóveda⁶⁹. La posición de estas grietas y el modo de colapso considerado están descritos suficientemente en las Figuras 8.34. y 8.35.(b).

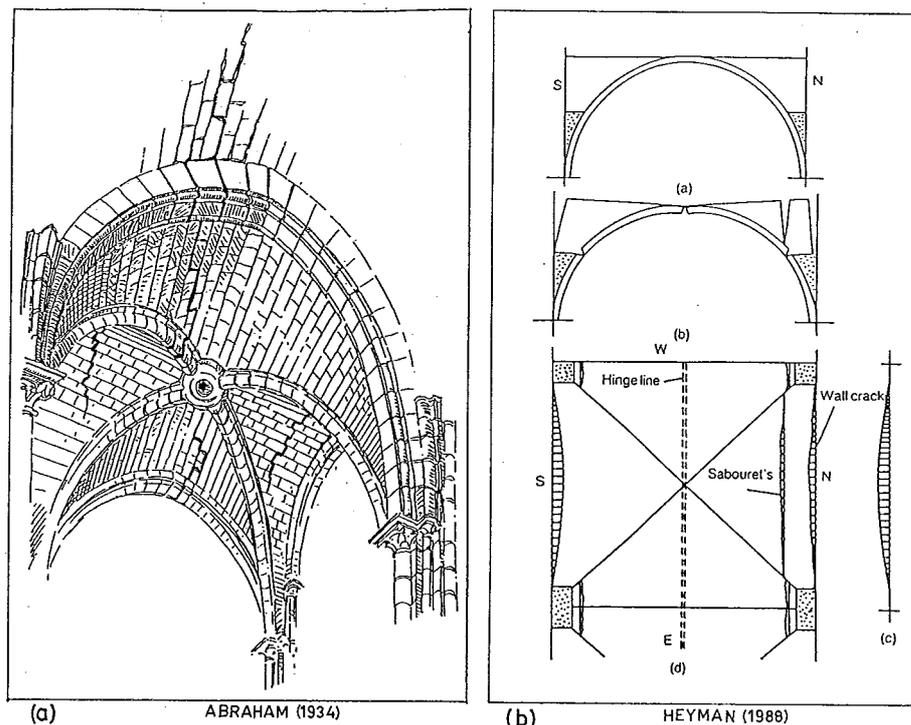


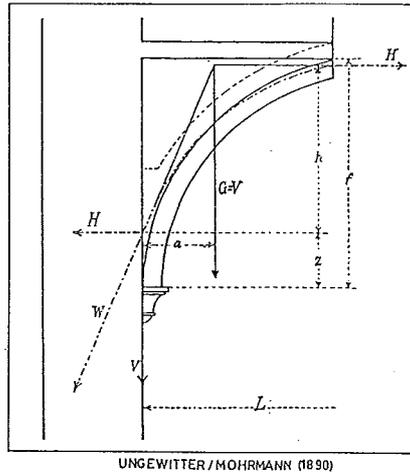
Figura 8.35. Grietas de Sabouret y modelo de colapso de una bóveda de crucería según Heyman

Para determinar el empuje sobre el contrafuerte basta considerar la posición del centro de gravedad de medio tramo; dado que el empuje horizontal tiene que pasar por la línea de coronación, podemos inmediatamente conocer aproximadamente su valor, suponiendo la resultante aproximadamente tangente a la curva de la sección transversal de la bóveda (véase Figura 8.36.). Mohrmann⁷⁰ calculó los valores de $G (= V)$, H , a y z , para bóvedas de crucería

69. El primero en hacer notar estas fisuras características cerca de los arranques fue Sabouret de quien han tomado el nombre. Véase: V. Sabouret, "Les voûtes d'arêtes nervurées. Rôle simplement décoratif des nervures." *Le Génie Civil*, Vol. 92, 1928. pp. 205-209. Véanse también el comentario de Pol Abraham, *Viollet-le-Duc et le rationalisme médiéval*. Paris: Vincent Freal, 1934, págs. 26-33, y las dos obras de Heyman citadas antes.

70. Ungewitter y Mohrmann, op. cit. más arriba.

generadas por la intersección de dos cilindros rectos, del tipo representado en la Figura 8.32. (a), y distintos espesores de bóveda.



UNGEWITTER / MOHRMANN (1890)

Figura 8.36. Bóveda de crucería: parámetros geométricos para el cálculo

Bóvedas de crucería cilíndricas:

Con la ayuda de los datos suministrados por Mohrmann hemos dibujado las gráficas de las esbelteces de los contrafuertes C/L (canto del contrafuerte/luz) para distintas alturas (distintos valores de H/L) y distintos tamaños (L), suponiendo un coeficiente de seguridad contra el vuelco para el contrafuerte de 2. El contrafuerte se prolonga hacia arriba hasta el nivel de la clave de la bóveda.

Basándonos en la discusión anterior hemos considerado un espesor uniforme de 20 cm, y como material piedra caliza de peso específico 2200 kg/m^3 . Los contrafuertes de cantería con peso específico 2400 kg/m^3 . Consideramos este espesor suficientemente generoso para incluir tanto plementerías, como nervios y claves⁷¹. Se han dibujado las gráficas para tres bóvedas de crucería diferentes generadas, la primera por un arco de medio punto $F/L = 0.5$, y las dos restantes por arcos apuntados de esbelteces $F/L = 2/3$ y $F/L = 5/6$.

71. El espesor de la bóveda de la catedral de Palma de Mallorca, con 20 metros de luz libre entre pilares es de sólo 15 cm. Véase: J. Rubió Bellver, "Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca." *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, 1912. pp. 87-140.

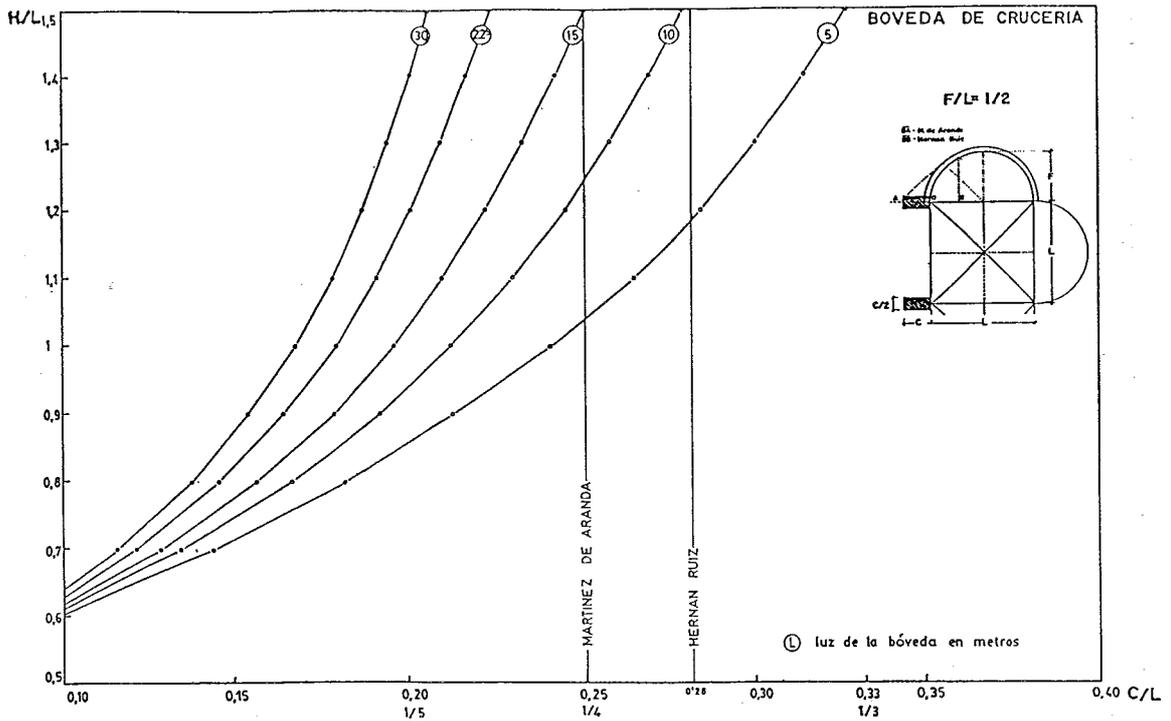


Figura 8.37. Contrafuerte bóveda de crucería: directriz semicircular

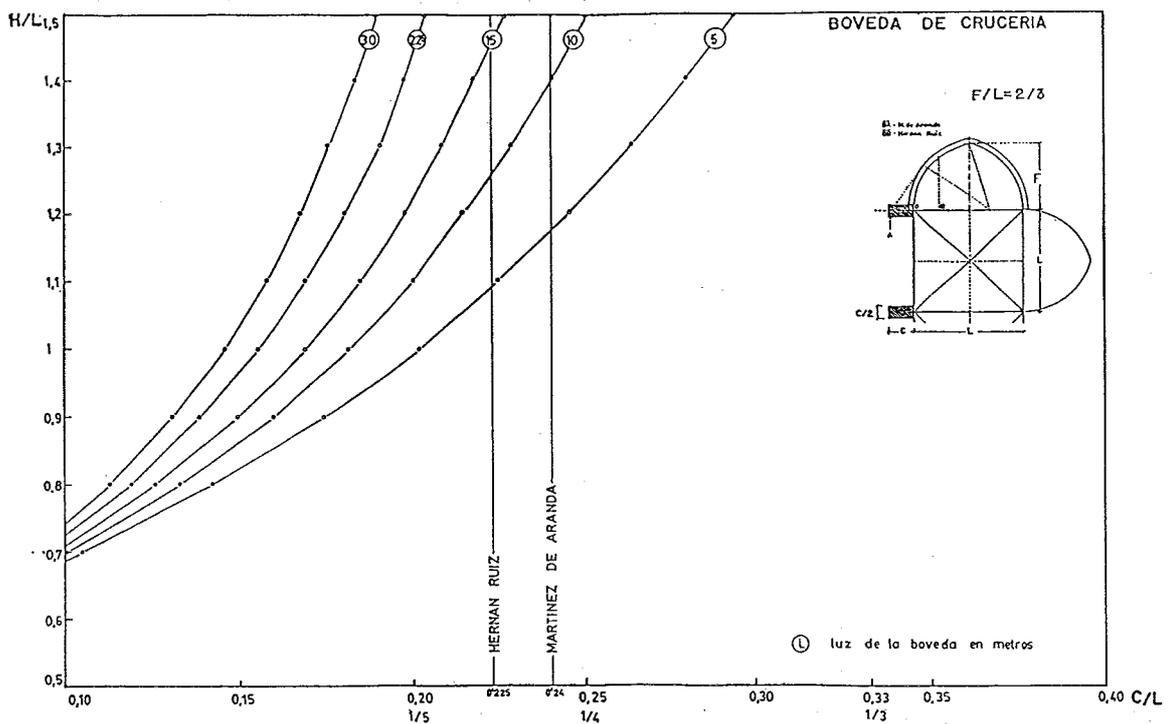


Figura 8.38. Contrafuerte bóveda de crucería: directriz apuntada, $F/L = 2/3$

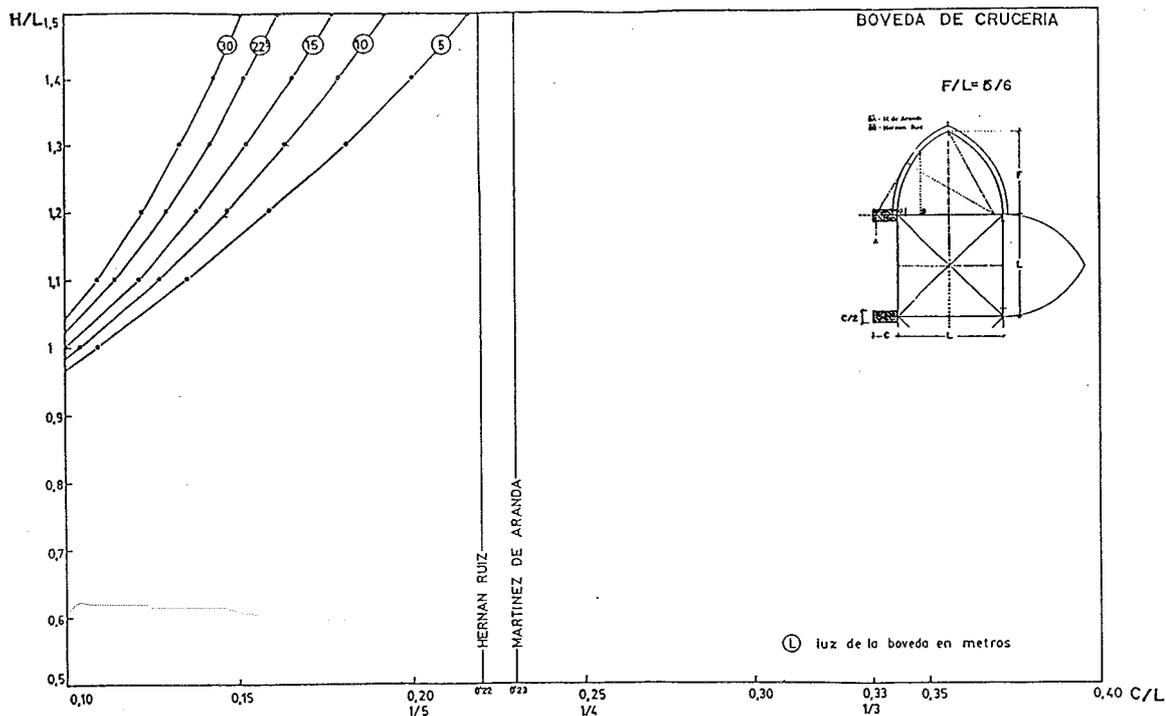


Figura 8.39. Contrafuerte bóveda de crucería: directriz apuntada, $F/L = 5/6$

En las citadas gráficas se han superpuesto las relaciones C/L obtenidas aplicando las reglas de Martínez de Aranda y Hernán Ruiz, que, como se discutió en la segunda parte tienen un origen gótico y, presumiblemente, se empleaban para dimensionar los contrafuertes de las bóvedas de crucería.

Como puede apreciarse ambas reglas funcionan bastante bien (en particular para las bóvedas góticas apuntadas), excepto para luces inferiores a los 10 metros, para las que el espesor de 20 cm puede considerarse, sin duda excesivo.

La bóveda de mayor peralte destaca por el pequeño valor de C/L que se obtiene. Efectivamente, una bóveda de este tipo probablemente se sostendría sin apenas contrafuertes, sobre todo si tenemos en cuenta el papel estabilizador del muro (los huecos rara vez van de contrafuerte a contrafuerte) y del peso de la cubierta. Quizá en estos casos de estructuras tan esbeltas y ligeras sea preciso considerar el efecto del viento. Aunque, como puede apreciar-

se en la Figura 8.40, la posición de la línea de empujes no varía sustancialmente para tamaños y proporciones normales (en la Figura $L = 13$ m).⁷²

Podemos ahora contestar una cuestión que se planteó en la Segunda Parte, con motivo de la comisión de expertos para la Catedral de Gerona. Bofill el autor de la propuesta aseguraba en el informe que al contrafuerte le sobraba $1/3$ del espesor. El peralte, la relación F/L , de la bóveda es aproximadamente $2/3$ y su H/L está comprendido entre 1 y 0.9 . Entrando en la gráfica de la Figura 8.38. para $L = 22.5$ m (ésta es aproximadamente la luz libre en este caso) obtenemos un valor de $C/L = 0.15$. Para el contrafuerte real, que corresponde a la regla de Martínez de Aranda, $C/L = 0.24$, si le quitamos $1/3$ obtenemos $C/L = 0.16$. Efectivamente, Bofill tenía razón y la bóveda sigue siendo estable con un tercio menos de espesor.

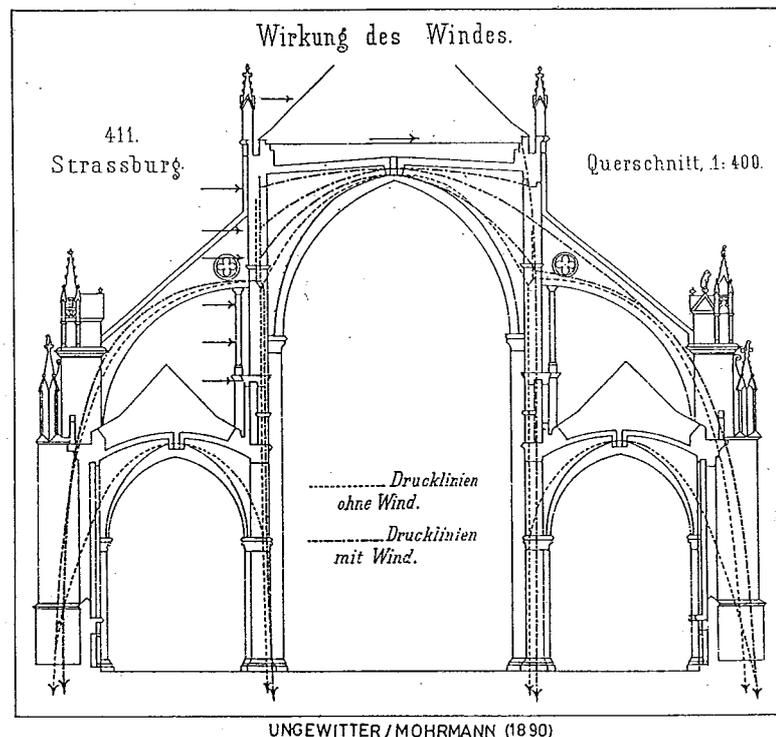


Figura 8.40. Viento: efecto en la estabilidad de la Catedral de Estrasburgo

72. Para una discusión del papel de los arbotantes en relación con la acción del viento sobre los tejados de las iglesias góticas, véase: J. Fitchen, "A Comment on the Function of the Upper Flying Buttress in French Gothic Architecture." *Gazette des Beaux-Arts*, Vol. 45, 1955. pp.69-90.

Bóvedas baídas: reglas de Rodrigo Gil.

El mismo procedimiento empleado para obtener los contrafuertes de las bóvedas de crucería puede aplicarse a las bóvedas baídas de las iglesias salón del Renacimiento español. Se trata, simplemente, de encontrar la posición del centro de gravedad de este tipo de bóveda y, en función de ella, los nuevos valores de V , H , a y z ⁷³. Hemos considerado el mismo coeficiente de seguridad al vuelco de 2, pero en este caso hemos reducido el espesor a 15 cm de piedra caliza y supuesto un intervalo de luces más pequeño, ambos más acordes con la práctica constructiva de Rodrigo Gil.

Se han estudiado dos casos: el primero teniendo en cuenta sólo el contrafuerte; el segundo, más acorde con la realidad, valorando el papel estabilizador de un pequeño trozo de muro a ambos lados del contrafuerte. Se han dibujado también los valores de C/L obtenidos a partir de la regla de Rodrigo Gil (véase apartado 5.2.4.b, págs. 112-113).

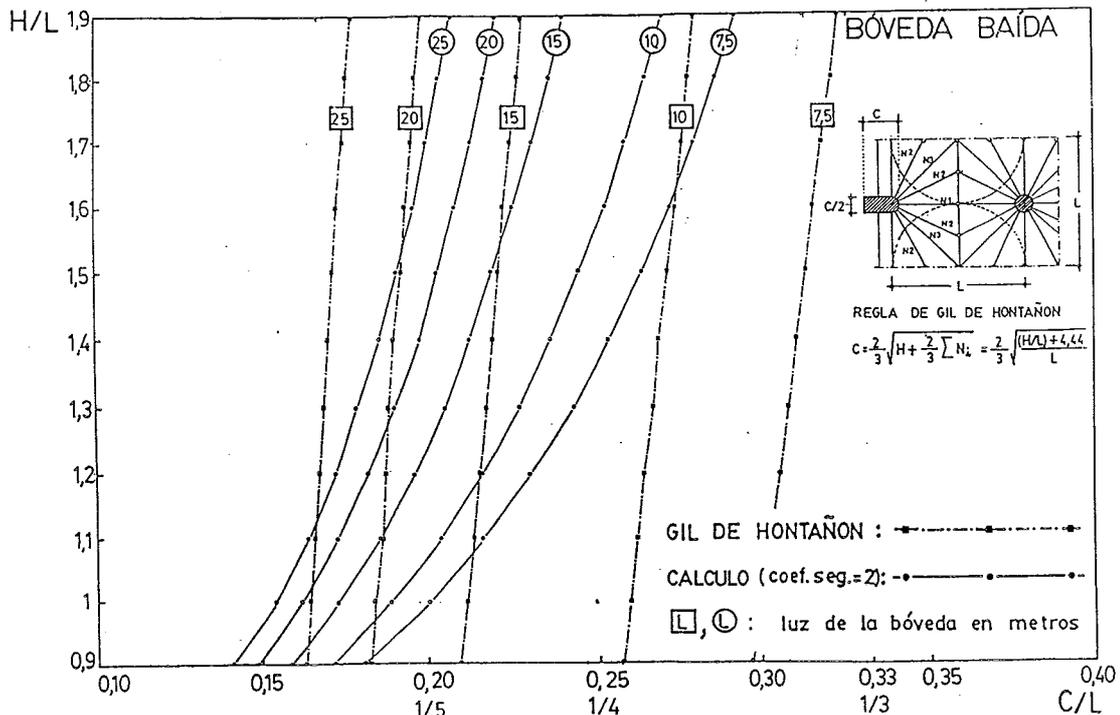


Figura 8.41. Contrafuertes para una bóveda baída (sin muro)

73. Hemos hallado estos valores mediante un simple programa de integración numérica por ordenador.

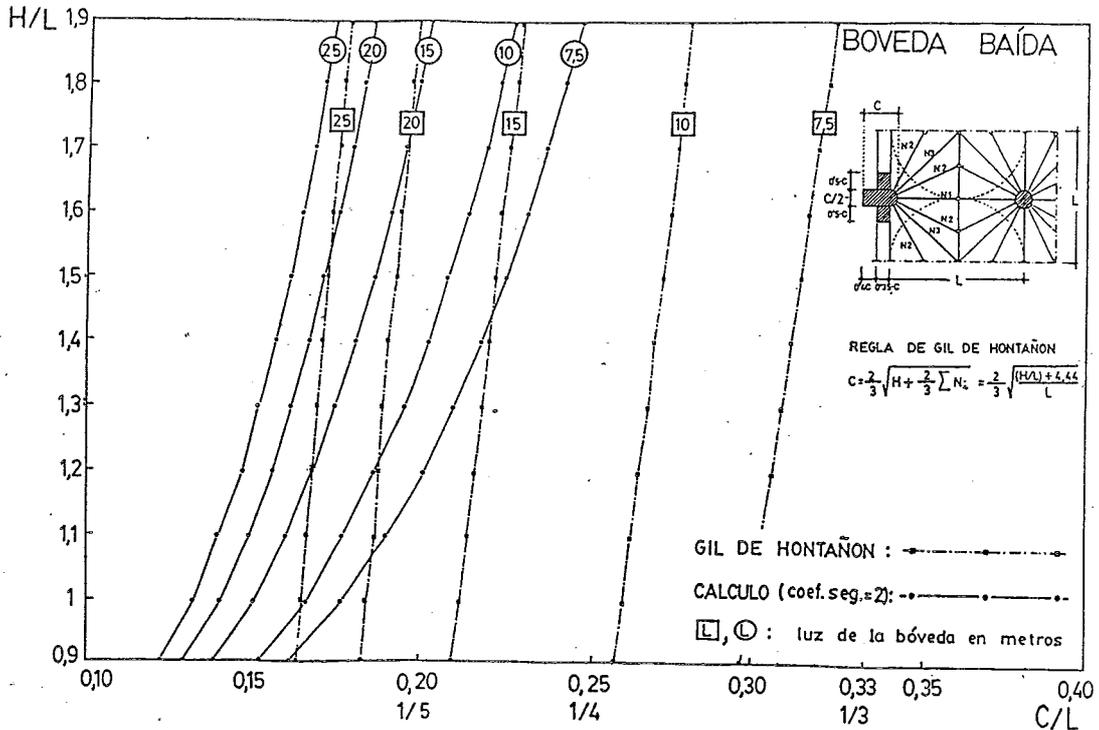


Figura 8.42. Contrafuertes para una bóveda baída (con muro)

Las reglas de Rodrigo Gil funcionan bastante bien, podríamos decir que sorprendentemente bien. Conducen a esbelteces un poco excesivas para tamaños pequeños, pero no hay que olvidar que la acción del viento es más acusada al disminuir la escala, como tendremos ocasión de ver con más detalle al estudiar las torres de fábrica.

La pregunta obvia es, ¿cómo llegó Rodrigo Gil a formular estas reglas? Creo que el proceso puede ser el mismo que el que condujo a la formulación de las reglas empíricas de diseño de puentes (véase apartado 8.2.5.b, más arriba): a partir de una lista de ejemplos construidos satisfactorios, de distintos tamaños, se trata de buscar una fórmula que produzca un buen ajuste. No hace falta que la fórmula sea homogénea y, de hecho, las de Rodrigo Gil no lo son, como tampoco lo son las reglas de dimensionamiento de la clave para los puentes, ni muchas fórmulas prácticas que aparecen en la normativa actual

sobre cálculo de estructuras.⁷⁴

8.3.1.c Límites de tamaño

Como en el caso de los arcos se puede plantear el problema de si se han alcanzado los límites de tamaño en este tipo de estructuras. En la Figura 8.43 se ha dibujado la relación entre las tensiones máximas y el tamaño para distintos valores de F/L y con una relación H/L (altura/luz) = 1.5. La gráfica puede servir también para bóvedas baídas ya que tanto su superficie como la posición de sus centros de gravedad son similares al caso de F/L = 1.5. De la gráfica se deduce como receta práctica aproximada (con una variación de 1 a 2 dependiendo de la situación real de la resultante en función de la carga de la cubierta, movimientos de la estructura, etc.):

$$\sigma_{\text{máx}} \text{ (kg/cm}^2\text{)} = L \text{ (en metros)}$$

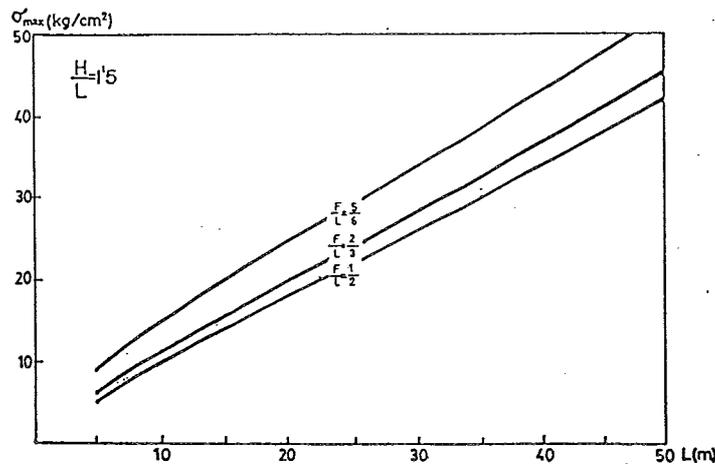


Figura 8.43. Tensiones máximas en bóvedas de crucería

74. Para que las fórmulas algebraicas de Rodrigo Gil den resultados correctos es preciso introducir los datos en pies castellanos (1 pie = 0.28 cm) y no en metros! Sanabria en un intento de comparar los resultados de las fórmulas con ejemplos construidos cometió este error, sacando la conclusión errónea de que las reglas son demasiado conservadoras, cuando, precisamente presentan un ajuste asombrosamente bueno. Véase: S. L. Sanabria, "The Mechanization of Design in the 16th Century: The Structural Formulae of Rodrigo Gil de Hontañón." *Journal of the Society of Architectural Historians*, Vol. 41, 1982. pág. 281-293.

Podemos comparar ahora con los datos de la Tabla 8.2⁷⁵ donde se recogen las dimensiones de las bóvedas de crucería más grandes.

GRANDES BOVEDAS DE CRUCERIA	LUZ	
	pies	metros
Catedral de Colonia	44	13.2
Nôtre Dame de Paris	48	14.4
Catedral de Amiens	49	14.7
Catedral de Bourges	49	14.7
Catedral de Chartres	50	15
Catedral de Narbonne	54	16.2
Catedral de Albi	58	17.4
Catedral de Toulouse	60	18
Catedral de Palma de Mallorca	67	20
Catedral de Gerona	73	22

Tabla 8.2. Grandes bóvedas de crucería

Como en el caso de los arcos, las dimensiones máximas debido a la resistencia de las fábricas están lejos de haber sido alcanzadas.

8.3.2 Cúpulas

La diferencia mas importante entre un arco y una cúpula reside en que en el arco solo consideraremos las tensiones sobre las dos secciones radiales, en las cúpulas las dovelas están sujetas a tensiones en las cuatro caras. Esto hace a las cúpulas mas estables que los arcos y permite, por ejemplo, eliminar las piedras de la clave y abrir un óculo sin que peligre su estabilidad.⁷⁶

75. Las dimensiones se han tomado fundamentalmente de G. E. Street, *Some Account of Gothic Architecture in Spain*. London: 1865, pág. 323. La conversión a metros dependerá del pie empleado en cada caso. Para dar una idea aproximada de tamaño hemos supuesto un pie de 0.30 cm, aunque esto puede no ser válido en algunos de los casos.

76. Esta mayor estabilidad de las cúpulas en relación a los arcos provocó el siguiente comentario de uno de los más conocidos historiadores de la arquitectura del siglo pasado: "...the dome is in itself so perfect as a constructive expedient, that it is almost as difficult to build a dome that will fall as it is a vault [arch] that will stand." J. Fergusson, *The Illustrated Handbook of Architecture*. London: J. Murray, 1859, pág. 441.

Si todas las tensiones actuaran por compresión no habría ningún problema y así sucede en la parte superior de las cúpulas. Pero, a partir de un cierto ángulo, aparecen tensiones de tracción que las fábricas no están preparadas para resistir. El ángulo en que ocurre esto depende de la forma de la cúpula y del sistema de cargas aplicadas a ella. En una cúpula semicircular de espesor constante sometida a su propio peso, las tracciones aparecen para un ángulo $\alpha = 51.8^\circ$, a partir del eje vertical. Una linterna, o también un óculo, hacen que la zona de tensiones por tracción se desplace hacia la coronación.

Debido a este fenómeno y a la incapacidad de la obra de resistir tracciones, el problema de la cúpula puede reducirse al de el arco de fábrica, aplicando como lo hemos hecho para las bóvedas de crucería el análisis a rotura: la cúpula por debajo del punto de tensión cero se rompe una serie fragmentos que actúan como un conjunto de arcos radiales (véase Figura 1.2. (b), página 12). Este ha sido el método tradicional⁷⁷ para estudiar las cúpulas de obra, y ha sido revitalizado recientemente por Heyman⁷⁸.

Así pues, una cúpula puede agrietarse formado una serie de arcos radiales sin que por ello deje de ser estable, siempre y cuando tenga un contrafuerte suficiente. Los antiguos maestros constructores conocían este hecho, y, por ejemplo, en la cúpula de Santa Sofía, como Dunn⁷⁹ ha señalado correc-

77. Aunque este fenómeno era bien conocido desde la antigüedad, esta hipótesis de rotura fue empleada por primera vez como base de un análisis de estabilidad, en los dos estudios realizados en el siglo XVIII sobre la cúpula de San Pedro en Roma: T. Le Seur, F. Jacquier y R.G. Boscovich, *Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro*. Roma: 1743, y G. Poleni, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: 1748. Más tarde, se convirtió en el método más común para el análisis de las cúpulas durante el siglo XIX.

78. Véase: J. Heyman, "On Shell Solutions of Masonry Domes." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 3, 1967, pp. 227-241, and, J. Heyman, *Equilibrium of Shell Structures*. Oxford: 1977, pp. 106-116.

79. W. Dunn, "The Principles of Dome Construction." *Architectural Review*, Vol. 23, 1908, pp. 63-73 and 108-112. Este artículo constituye, en nuestra opinión, la mejor introducción al problema del funcionamiento estructural de las cúpulas de fábrica.

tamente, el arquitecto, conociendo este efecto, dispuso ventanas en torno a la base, y, así, esta parte de la construcción esta formada por 44 arcos radiales separados⁸⁰.

8.3.2.a Estabilidad de las cúpulas

Las mismas observaciones hechas sobre la estabilidad de los arcos son válidas para las cúpulas. Una cúpula, por ello debe presentar para ser estable una cierta forma límite. Como la distribución de las cargas es mas favorable en las cúpulas estas pueden ser mucho mas delgadas que los arcos.

En el caso de una cúpula hemisférica de espesor constante, Heyman⁸¹ ha obtenido para la "esbeltez" (espesor/luz) de una cúpula semiesférica de espesor constante, espesor/vano, un valor de $1/47,6^{82}$, lo que equivale a decir que podemos hacer una cúpula aproximadamente 2.5 veces mas delgada que el correspondiente arco semicircular (véase Figura 8.44.). Hacer la cúpula apuntada es ventajosos desde el punto de vista de la estabilidad; así, la esbeltez límite de una cúpula apuntada generada por la revolución de un arco apuntado equilátero sería de solamente $1/73^{83}$. Como en el caso de los arcos, para obtener un cierto grado de seguridad aplicamos un factor geométrico de seguridad, comprendido típicamente entre 2 y 3.

80. Esta práctica parece haberse empleado también durante la época romana, si bien los romanos dejaban los arcos de ladrillo embebidos en el hormigón en masa. En ocasiones, los arcos ni siquiera llegaban hasta la parte superior de la cúpula. Véase: L. Torres Balbás, "Bóvedas romanas sobre arcos de resalto." *Archivo Español de Arqueología*, Vol. 64, 1946, pp. 173-28.

81. Véase: J. Heyman, *Equilibrium of Shell Structures*, op. cit. above.

82. Este valor coincide prácticamente con el de $1/43.4$ obtenido by Sir Edmund Beckett, que fue, por lo que sabemos, el primero en estudiar las proporciones de colapso de las cúpulas, en su artículo: "On the Mathematical Theory of Domes." *Memoirs of the Royal Institute of British Architects*, 1871 Feb, pp. 81-115. El mismo autor realizó un resumen de los resultados más importantes para la entrada 'Dome' en la *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., Edinburgh, U.K., 1875-1888, Vol. VII, pp. 347-348.

83. Sir Edmund Beckett, op. cit. más arriba.

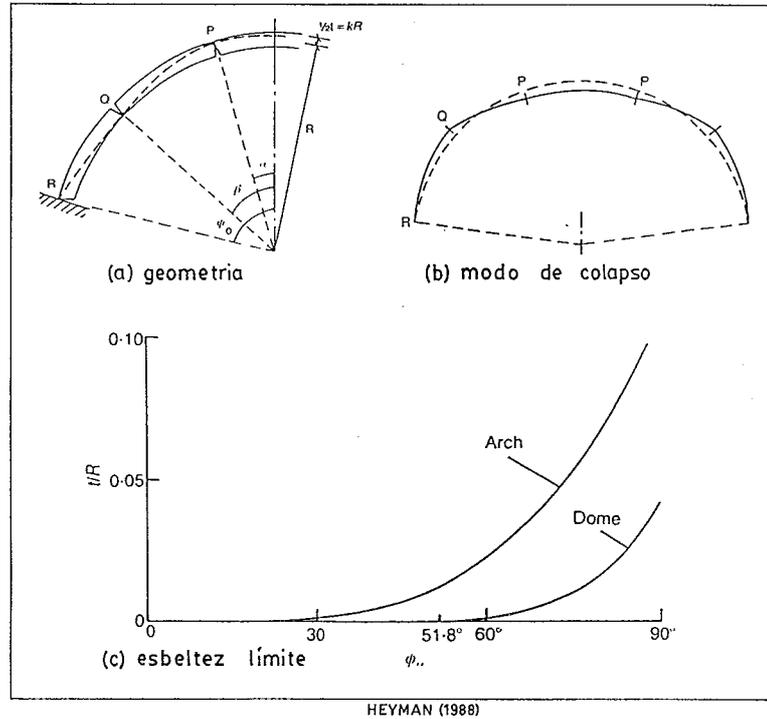


Figura 8.44. Modo de colapso y esbeltez límite de cúpulas esféricas

Estas formas "válidas" son independientes del tamaño, y para las cúpulas son aplicables, en general, salvo el caso de cúpulas muy rebajadas, para un intervalo de dimensiones mayor que en el caso de los arcos. Si en el caso de los arcos hay algunos que están cerca del límite, las cúpulas existentes de obra están muy lejos de este límite, como veremos mas adelante.

El efecto de las cargas puntuales puede ser despreciado porque la función de este tipo de estructuras como cubiertas excluye la aparición de cargas puntuales muy fuertes. Cuando aparecen, como en el caso de las linternas forman parte del peso propio y deben ser consideradas desde el principio en el estudio del equilibrio de la estructura.

La ecuación deducida usando el análisis dimensional para la influencia de las cargas puntuales en arcos semejantes se aplica a este caso por completo y la carga crítica aumenta con el cubo de las dimensiones lineales. Esto, por supuesto, es lo que sucede con las linternas.

8.3.2.b Verificación de algunas cúpulas

Empezamos este capítulo con un comentario referente a la cúpula de San Biagio y una comparación con las cúpulas de San Pedro y Santa María del Fiore. Hemos elegido la cúpula de San Biagio por dos razones: en primer lugar porque es una fracción (1/3) casi exacta de la cúpula de San Pedro y esto nos permite establecer una relación sencilla; en segundo lugar porque corresponde aproximadamente con las proporciones de la regla de Carlo Fontana que hemos visto en la Segunda Parte. Hemos hecho un análisis gráfico de la estabilidad de este tipo de cúpula basándonos en la hipótesis expuesta anteriormente del análisis límite de las cúpulas de fábrica (véase la Figura 8.45.). Como puede verse, el proyecto es muy satisfactorio puesto que la línea de empujes esta siempre contenida dentro del tercio medio de la sección.

Para las tensiones, una aplicación sencilla del análisis dimensional muestra que:

$$\sigma_{\max} = \Phi(w_1, w_2, \dots) \mu s$$

donde Φ es una función de los factores de forma, μ es la densidad del material y s es una dimensión lineal de la cúpula (podemos tomar por ejemplo el vano s en la base de la cúpula).

El valor calculado de Φ para una cúpula de esta forma es aproximadamente 1.28^{84} . La correspondiente σ_{\max} , para San Biagio, luz = 14 m., $\mu = 2000 \text{ kg/m}^3$, es de 3.4 kg/cm^2 . Una cúpula semejante tres veces mayor presentaría una σ_{\max} de 10 kg/cm^2 que no es mucho incluso para un ladrillo de mediana calidad. Ahora debemos comparar este valor con el valor de σ_{\max} en las otras dos cúpulas con las que hemos hecho la comparación.

84. El valor de Φ para una cúpula semiesférica de espesor constante es 1. La forma apuntada hace que el volumen global crezca en relación con la superficie y las tensiones crecen. Sin embargo, como hemos visto esta forma es más estable.

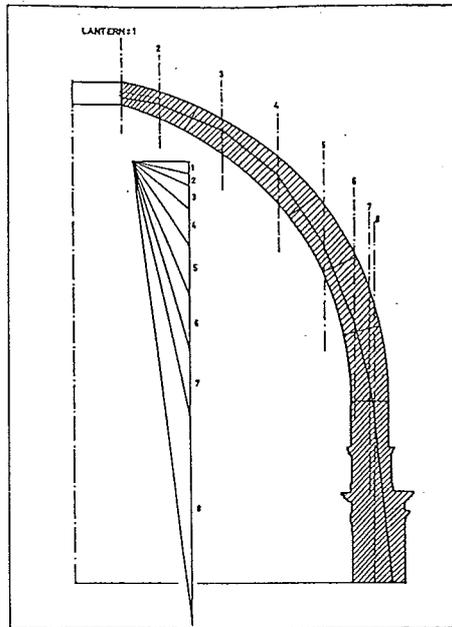
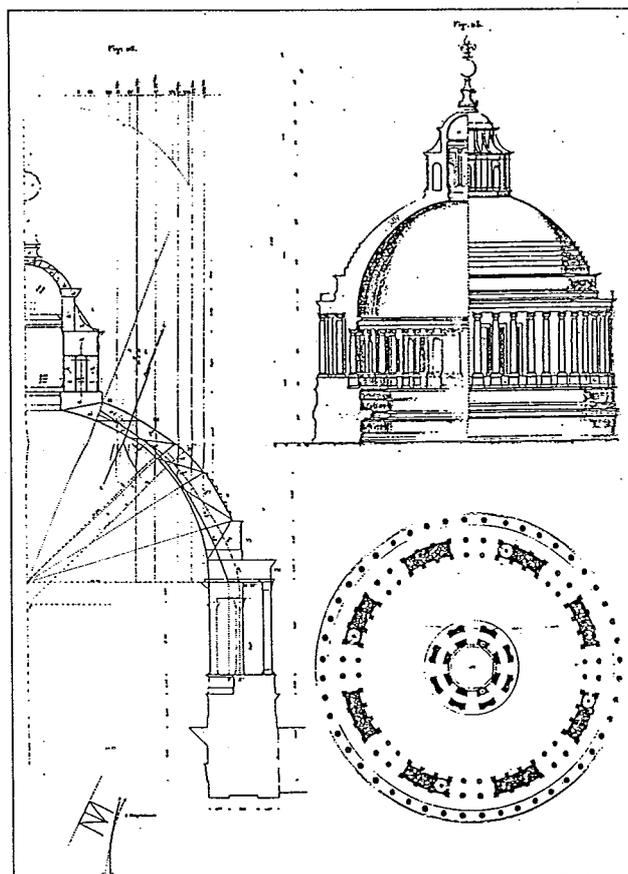


Figura. 8.45. Verificación de la regla de Fontana



DURAND-CLAYE (1880)

Figura 8.46. Verificación de la estabilidad de la Cúpula de Bramante

En el caso de San Pedro, siendo μ igual, el valor de σ_{max} es, siguiendo las estimaciones de Gottgetreu⁸⁵, de 10.6 kg/cm². El valor de Φ es muy similar, 1.29. La posición de la línea de empujes no es tan favorable como en San Biagio - pasa a 1/5 del espesor en la base - pero esto está quizá compensado por la reducción de peso en la parte superior por ser una doble cúpula⁸⁶.

Parsons⁸⁷ (véase Figura 8.47.) obtuvo para Santa Maria del Fiore una tensión máxima de 25 kg/cm² pero esto es para el caso de la hipótesis, excesivamente desfavorable, en que se supone que todo el peso está concentrado sobre los nervios.

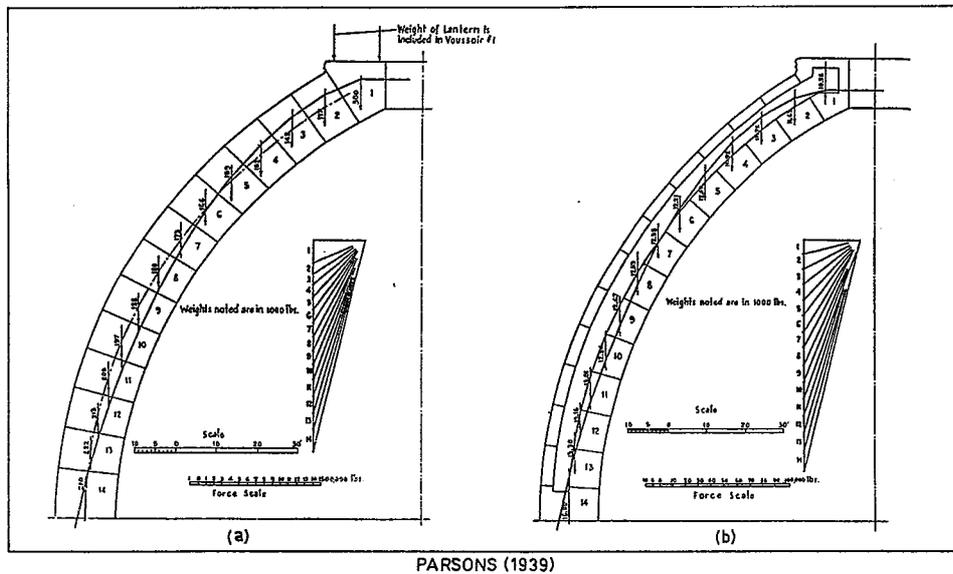


Figura 8.47. Verificación de la estabilidad de Santa Maria del Fiore

85. Los cálculos se han realizado a partir del análisis gráfico realizado por Gottgetreu. Su estudio está limitado a la posición de la línea de empujes. Conocida ésta, el determinar las tensiones se reduce a una simple operación aritmética que incluye el peso total de la cúpula y la superficie de su base. Véase: R. Gottgetreu, *Lehrbuch der Hochbaukonstruktionen*. Vol. I, pp. 254-260, Tafel. XXIX, 'Stabilitätuntersuchung der Peterskuppel zu Rom'.

86. Sorprendentemente, el análisis realizado por Durand-Claye sobre la cúpula proyectada por Bramante, inspirada en la del Panteón dió una σ_{max} de 8.8 kg/cm², con $\Phi = 1.07$. Véase: A. Durand-Claye, "Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs. Application aux voûtes sphériques." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1880, pp. 416-440, planches 14-16.

87. Véase: W. B. Parsons, *Engineers and Engineering in the Renaissance*. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1976 (reprint of 1939 ed.), pp. 587-600.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

Si suponemos el peso distribuido siguiendo la línea de empujes para la solución de la bóveda en rincón de claustro entonces obtenemos 10.2 kg/cm^2 , siendo Φ igual a 1.22. El inconveniente de usar la forma hexagonal esta compensado por la posición mas favorable de la línea de empujes, pasando netamente dentro del tercio medio, y por el uso de la doble cúpula.

Los niveles de las tensiones resultantes de los análisis previos son muy moderados. Por supuesto, las tensiones máximas deben encontrarse no en las cúpulas (elementos superficiales) sino en los pilares (elementos lineales) pero aún en este caso las tensiones no se acercan a un nivel peligroso para una buena fábrica. Por ejemplo, en los pilares principales de San Pedro, uno de los más grandes edificios de fábrica, la tensión es de 17 kg/cm^2 ⁸⁸.

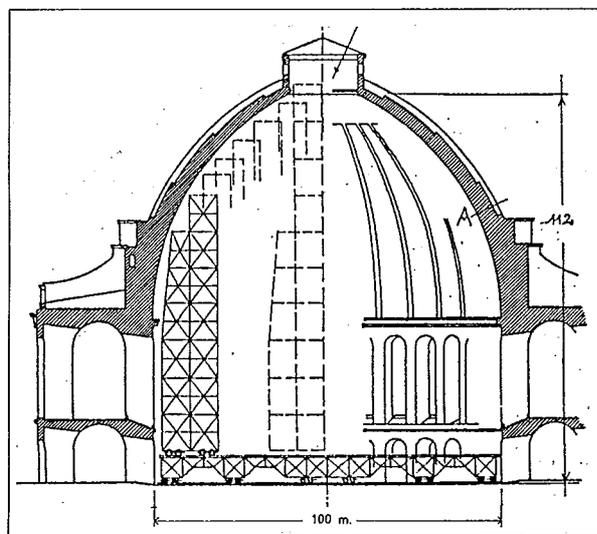


Figura 8.48. Proyecto para una cúpula de ladrillo de 100 m de luz⁸⁹

Considerando que una buena fábrica puede presentar una tensión admisible de un orden de magnitud superior, entre $50-150 \text{ kg/cm}^2$, es un hecho que las cúpulas no se aproximan incluso a los límites del tamaño posible (véase la Tabla 8.3 para una lista de las mayores cúpulas de fábrica). Por ejemplo,

88. Véase: L. M. N. H. Navier, *Resumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines*. Bruselas: 1839, pág. 102.

89. Proyecto según Mäkelt, "Der Bau großer gemauerten Kuppelgewölbe." *Zentralblatt der Bauverwaltung*, Vol. 62, 1942, pp. 409-417.

multiplicando por tres las dimensiones de San Pedro obtendríamos una tensión máxima sobre los pilares de 51 Kg/cm² que no es excesiva; el problema sería el volumen total de fábrica resultante; se trata de una cuestión de escala y y de uso, y no de resistencia de los materiales⁹⁰

GRANDES CUPULAS DE FABRICA	LUZ (m)
Panteón (Roma, siglo I)	43
Santa Maria del Fiore (Florencia, siglo XV)	42
San Pedro (Roma, siglo XVII)	42
Gol Gomuz (Bijapur, India, siglo XVII)	42
Iglesia de Mosta (Mosta, Malta, siglo XIX)	38
San Francisco el Grande (Madrid, siglo XVIII)	35
Santa Sofía (Estambul, siglo VI)	33
San Pablo (Londres, siglo XVII)	33
San Carlo (Milán, siglo XIX)	32

Tabla 8.3 Grandes cúpulas de fábrica

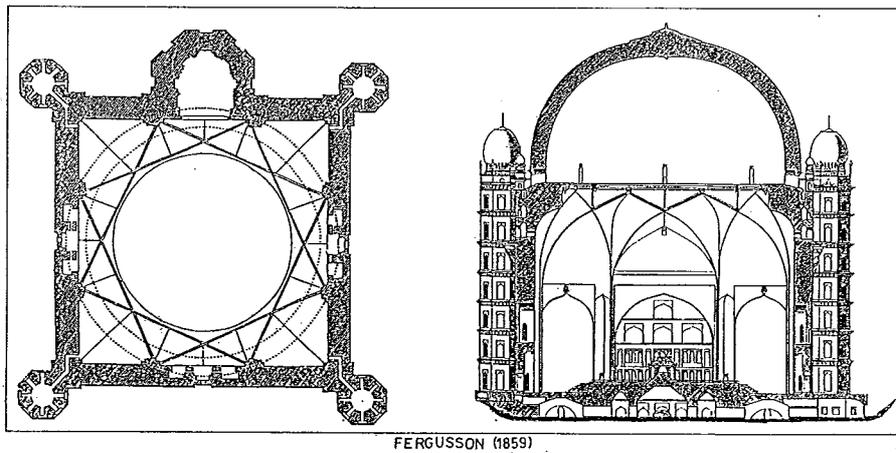


Figura 8.49. Cúpula del Gol Gomuz en Bijapur. Aparentemente la cúpula se sostiene sin apenas contrafuertes. Sin embargo obsérvese en la sección el gran volumen de las pechinas en voladizo que centran los empujes dentro de los muros, sobre todo si imaginamos un corte en diagonal⁹¹.

90. El volumen de la fábrica de San Pedro es de 107.988 m³. Un incremento lineal de las dimensiones por un factor de 3 multiplicaría este valor por 27 lo que representarían 2,915.676 m³. Más que el volumen de la pirámide de (2,592.100 m³). El volumen de San Pedro se ha tomado de los cálculos realizados por Fontana en *Il tempio Vaticano...*, op. cit., más arriba; el volumen de la pirámide de Cheops se ha calculado a partir de sus dimensiones generales.

91. Para un estudio de la estabilidad de esta cúpula, véase Sir Edmund Beckett, "On the Mathematical Theory of Domes.", op. cit., más arriba.

8.3.3 Teorema de Rankine

El teorema de la proyección paralela de Rankine se aplica también al caso de las bóvedas, o a cualquier estructura espacial de fábrica. La aplicación práctica a estos casos es muy útil debido a que el análisis de este tipo de estructuras espaciales es, en general, mucho más complicado.

Por ejemplo, para el caso de las bóvedas cilíndricas de crucería conocidos los contrafuertes para un tramo cuadrado podemos encontrar fácilmente el contrafuerte para cualquier longitud de tramo.

En el caso de las cúpulas ocurre lo mismo. Supongamos que queremos estudiar la estabilidad de una cúpula de forma elipsoidal con tres ejes principales diferentes. El estudio de la estabilidad y del nivel de tensión sobre esta estructura implica largos y penosos cálculos puesto que los arcos generados por la cúpula en el momento del colapso serían todos ellos distintos cada cuarto de la base.

Podemos obtener una respuesta inmediata aplicando una proyección paralela de una cúpula hemisférica estable cuyas proporciones conocemos (véase anteriormente), y multiplicando cada una de las coordenadas x , y , z , por el factor apropiado para obtener una cúpula con las proporciones que se desean. Las variaciones de las tensiones pueden obtenerse, también, analíticamente usando la ecuación de Rankine o gráficamente para los puntos en que se espera el mayor aumento.

8.4 Torres de fábrica

El tema de las torres de fábrica se da fuera del ámbito de esta Tesis, pero hemos considerado oportuno tratarlo por su semejanza con el problema del diseño de arcos para puentes y por la importancia de la regla que Gil

de Hontañón suministra para su dimensionamiento.

El análisis de las torres de fábrica fue abordado relativamente tarde. La primera mención la hemos encontrado en el *Compendio matemático...* del Padre Tosca⁹², donde hace alusión a la condición fundamental de equilibrio: la perpendicular que pasa por el centro de gravedad debe pasar por dentro de la base de sustentación. La primera memoria científica creemos es la de Fresnel⁹³, y fue seguida por escasas contribuciones, hasta que Rankine formuló con todo rigor en su *Manual of Applied Mechanics* la teoría de la estabilidad de las torres de fábrica⁹⁴.

8.4.1 Reglas empíricas: verificación

Así, pues, en el problema de la estabilidad de las torres de fábrica la teoría solamente alcanzó un nivel de desarrollo suficiente a mediados del siglo XIX. El dimensionamiento de se realizó hasta entonces utilizando, fundamentalmente, las reglas empíricas formuladas por Alberti, que aparecen

92. "Ay algunas torres inclinadas azia una parte, edificadas con tal industria que se mantienen firmes, con admiracion de quien las mira: una de estas ay muy celebrada en Pisa, que tiene de alto 78 codos, ó, 117 pies, y tiene de inclinacion nueve pies, y medio, es redonda y de marmol blanco... Otra ay en Bolonia, mas alta que la de Pisa, con nueve pies de inclinacion; es quadrangula, y de ladrillo. Pidese la causa porque se mantienen estas torres sin caerse, no obstante tanta inclinacion? Respondo se la causa estar el centro de gravedad de dichas torres dentro de la columna de sustentacion, de suerte que la linea de direccion, que de su centro de gravedad baxa al centro de la tierra, no se sale fuera del piè, o base de sustentacion, con que segun las reglas de la Statica, no han de poder caer, aunque tengan aquella inclinacion; pero ademas de esto necesitan de que las piedras, ò ladrillos de que se componen, estén muy bien unidos, y travados entre sí, porque de otra suerte, aunque no toda la torre, pero parte de esta estaria expuesta à que desgajandose de lo restante padeciese ruina. Y esto parece ser bastante para que se entienda la fuerça, y eficacia del centro de gravedad." Op. cit., Vol. 4, págs. 237-238.

93. L. Fresnel, "Mémoire sur la stabilité du phare en construction a Belle-Ile (océan)." *Annales des Ponts et Chaussées*, , 1831, 2me sem. pp. 385-421, lám. 17

94. Rankine, op. cit., págs. 240-241. Otras contribuciones al tema, también en la segunda mitad del siglo XIX son: Krafft "Sulla stabilita' dei camini per uso industriale." *Il Politecnico*, Vol. 21, 1873. pp. 505-506; Krafft "De la stabilité des cheminées d'usines." *Annales des Ponts et Chaussées*, , 1873, 1er sem. pp. 251-254; A. Gouilly, *Théorie sur la stabilité des hautes cheminées en maçonnerie*. Paris: J. Dejeu et Cie, 1876; Renaud "Chute d'une cheminée de filature, au Havre." *Annales des Ponts et Chaussées*, , 1872, 2me sem. pp. 277-283, lám. 25.

VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS

citadas sistemáticamente, como hemos visto en la Segunda Parte, en todos los tratados que hemos consultado (véase págs. 155-157, más arriba). Todavía a finales del siglo XIX se empleaban este tipo de reglas proporcionales para dimensionar las torres de los faros⁹⁵.

En este contexto son de importancia extraordinaria las reglas propuestas por Rodrigo Gil de Hontañón para dimensionar los muros y contrafuertes de las torres. Las citadas reglas, al incluir la raíz cuadrada, tienen en cuenta el incremento de la estabilidad de las torres al aumentar el tamaño. En efecto, si suponemos la velocidad máxima del viento como una constante independientemente de la altura, la acción del viento crece con la superficie (cuadrado de la longitud) mientras que el peso de la torre crece con el volumen (cubo de la longitud). Como resultado de ello una torre es tanto más estable cuanto más grande es y el empleo de reglas proporcionales del tipo de las arriba citadas conduce a una estabilidad excesiva en relación con el consumo de material: las torres pequeñas presentan una relación H/E (altura/espesor) mayor que las grandes, como ya vimos en la Figura 8.4, más arriba.

En la Figura 8.50. hemos dibujado los valores de H/E en relación con la altura para torres cuadradas de sección constante, para distintos valores de esbeltez H/B (altura/lado de la base), empleando las fórmulas deducidas por Rankine⁹⁶. También hemos representado los valores obtenidos por las reglas de Gil de Hontañón y Alberti. Como puede apreciarse fácilmente, la regla de Gil de Hontañón produce un ajuste mucho mejor, y, para una torre de 100 m de altura, disminuye el consumo de material en relación con la regla proporcio-

95. Véase M. Carrillo de Albornoz, "Memoria sobre la construcción de la nueva torre de la farola del Puerto de la Habana, dirigida por el Coronel graduado Comandante de batallón de Ingenieros, D. José Benítez." *Elementos de Arquitectura por John Millington...*, Madrid: Imprenta Nacional, 1848. Tomo II, Apéndice 10, pp. 739, donde recomienda para el espesor tomar la doceava parte de la altura: "... se sabe que para dar á un muro circular una grande estabilidad en las construcciones ordinarias, basta darle de espesor la dozava parte de su altura."

96. Op. cit., pág. 243.

nal de Alberti por un factor, nada despreciable, entre 3.5 y 4. Ambas reglas se vuelven inseguras para tamaños inferiores a los 9 metros.

Los valores de H/E obtenidos por el cálculo son muy grandes, y, creemos solamente han sido alcanzados valores semejantes en la construcción de algunas espiras góticas⁹⁷ y de las chimeneas de ladrillo en la segunda mitad del siglo XIX. Por ejemplo, la chimenea troncocónica⁹⁸ de Saint Rollox (cerca de Glasgow) en Gran Bretaña, con 130 metros de altura, presenta un valor medio de $H/E = 230$.

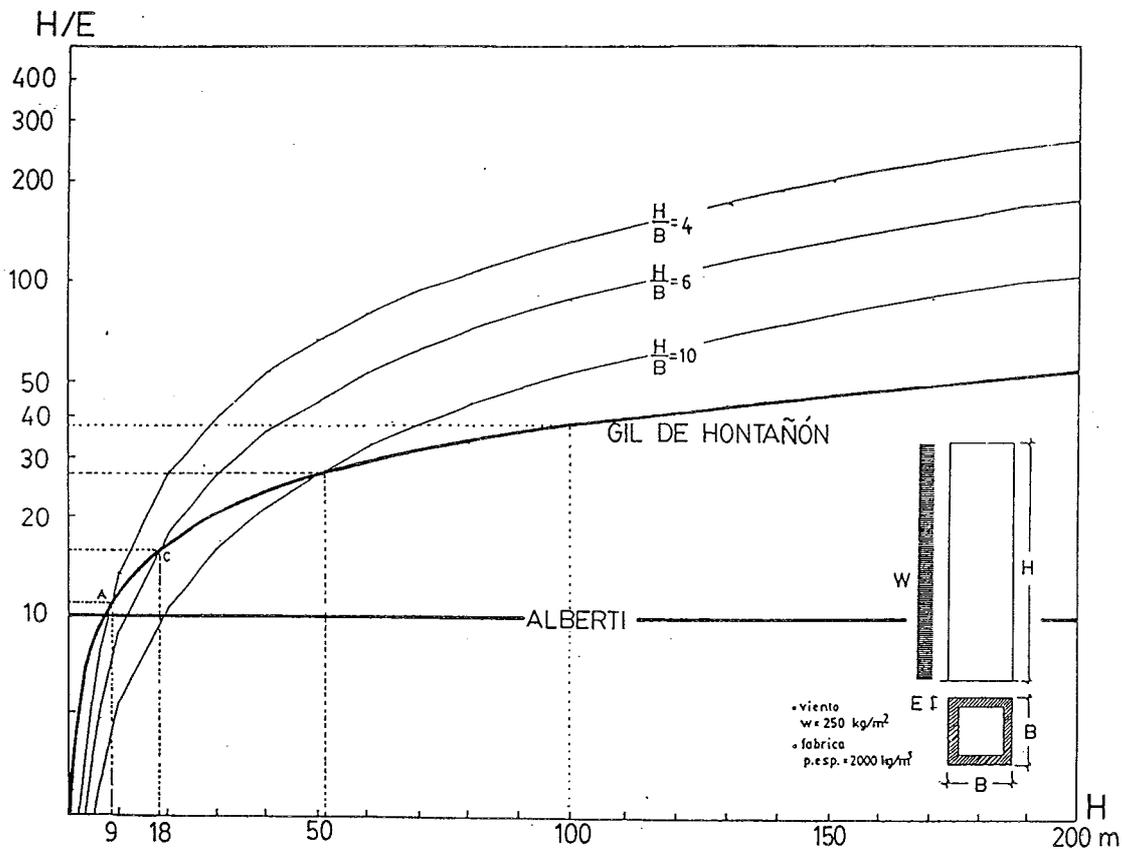


Figura 8.50. Estabilidad de torres cuadradas de fábrica

97. La espira de la catedral de Salisbury con 53 metros de altura a partir de su arranque de la torre (62 m), presenta sólo un espesor medio de 25 cm, lo que da un valor $H/E = 212$. Citado por R. J. Mainstone, *Developments in structural form*. Harmondsworth: Penguin, 1983. pág. 260.

98. Las dimensiones básicas son: altura 435.5 pies; diámetro de la base 40 pies; diámetro en la coronación 13 pies 6"; espesor en la base 2 pies 7.5"; espesor en la coronación 1 pies 2". Según Rankine, op. cit. pág. 640.

8.4.2 Límites de tamaño

Los valores de las tensiones dependen, fundamentalmente, de la altura total. En efecto, en ausencia de viento, el peso total vendrá dado por una expresión del tipo:

$$P = k \cdot \mu \cdot L^3$$

donde k es una constante característica de la sección; μ es el peso específico de la fábrica y L es una dimensión lineal cualquiera (por ej. la altura).

El área de la base vendrá dada por:

$$A = k' \cdot L^2$$

donde k' es otra constante de sección. La tensión máxima tendrá la forma:

$$[1] \quad \sigma_{n \acute{a}x} = P/A = K \cdot \mu \cdot L$$

donde K es una constante.

El efecto del viento puede desplazar esta fuerza hasta, digamos, el límite del núcleo central de inercia, con lo que el valor de la tensión máxima puede, a lo sumo, doblarse. Despejando el valor de L (H) de la ecuación [1], podríamos saber la altura máxima que podría alcanzar una torre de una forma dada. Si consideramos la torre de sección constante en toda su altura, $K = 1$ y obtenemos que:

$$H_{n \acute{a}x} = \sigma_{adm} / \mu$$

que es una característica del material⁹⁹. Los valores de $H_{n \acute{a}x}$ para distintos tipos de fábricas han calculado en la Tabla 1.1 (véase página 26 más arriba). Como puede apreciarse en la citada Tabla los valores de H están comprendidos entre 500 y 6000 metros, dado que la torre de fábrica más alta, la torre de la catedral de Ulm, tiene "sólo" 161 m de altura¹⁰⁰, también en el caso de las

99. La altura máxima que puede alcanzar una columna de sección constante para que en su base no se supere la tensión admisible del material. Cox llama a esta longitud *material breaking length*. Véase: H. I. Cox, *The design of structures of least weight*. London: Pergamon, 1965, pág. 6.

100. Mainstone, op. cit., pág. 260.

torres, las construcciones edificadas hasta el momento no se acercan a los límites que imponen la resistencia a compresión de las fábricas, y el criterio de estabilidad sigue siendo el más restrictivo.

CONCLUSIONES

Ut pondera libra, sic aedificia architectura.
H. Gautier, *Traité des Ponts*

Las principales conclusiones de la presente Tesis son:

- **empleo de reglas empíricas.** Los antiguos constructores, arquitectos e ingenieros empleaban reglas empíricas para el dimensionamiento de los elementos estructurales de sus edificios de fábrica.
- **difusión.** Estas reglas tuvieron gran difusión tanto cronológica como geográficamente. Si bien las primeras pruebas documentales de su empleo datan del siglo XV, es más que probable que su origen se remonte a la antigüedad clásica. Su utilización se prolonga hasta la primera mitad del siglo XX. Geográficamente, su difusión se extiende por todo el ámbito estudiado (Europa).
- **valoración: enfoque elástico.** Hasta el momento la actitud hacia estas reglas ha estado fundamentalmente condicionada por el marco teórico de referencia elegido: la teoría clásica de la elasticidad. La postura más extendida ha sido: como no están basadas (no podían estarlo) en el cálculo directo a partir de los principios de la teoría de la elasticidad, las reglas empíricas eran falsas e inútiles.
- **nuevo marco de referencia: análisis a rotura.** De hecho la teoría elástica no es gran ayuda a la hora de analizar las estructuras de fábrica. Un marco teórico más adecuado lo suministra el moderno análisis a rotura aplicado a las

CONCLUSIONES

fábricas, tal y como ha sido desarrollado, fundamentalmente por Heyman, en los últimos 20 años. Sin embargo, el origen del análisis a rotura de las fábricas se remonta a los inicios del siglo XVIII, y fue utilizado con éxito hasta la segunda mitad del siglo XIX y comienzos del XX. La aparición de nuevos materiales, acero y hormigón armado, favoreció el desarrollo de la teoría de la elasticidad y el análisis a rotura quedó olvidado hasta los años 1940.

▪ **estabilidad: la condición más restrictiva.** La aplicación del análisis a rotura a las estructuras de fábrica confirma que la condición más restrictiva para el diseño no es la resistencia, sino la estabilidad. Para que una estructura sea estable sus elementos estructurales deben tener unas ciertas dimensiones que dependen, fundamentalmente, de la forma geométrica de la estructura. Esto conduce a la existencia de "proporciones" válidas para el diseño de arcos, bóvedas y contrafuertes, e, incluso, de edificios, independientemente del tamaño.

▪ **formas válidas y reglas proporcionales.** Las reglas empíricas proporcionales (geométricas o aritméticas) suministran un medio para "fijar" estas proporciones válidas mediante parámetros adimensionales. Por tanto, constituyen un método válido y racional para el diseño de este tipo de estructuras. Estas consideraciones fueron ya hechas en el siglo XIX por Ungewitter, Mohrmann y Esselborn, y, recientemente, por Heyman y Gordon, si bien no han recibido gran atención por parte de los historiadores de la construcción.

▪ **problemas no-proporcionales.** Algunos problemas del diseño de estructuras de fábrica conducen a soluciones no-proporcionales (no son independientes del

tamaño). Este es el caso de los contrafuertes y claves de las bóvedas góticas, de los puentes y torres de fábrica. Este tipo de estructuras se hacen más estables a medida que crecen en tamaño, y sus elementos estructurales pueden hacerse proporcionalmente más esbeltos. Esto se deduce tanto de la aplicación de la teoría, como de la inspección de estructuras existentes de distintos tamaños. Las reglas proporcionales pueden emplearse también en este caso cuando representan un límite inferior razonable para el diseño, pero conducen a un gasto excesivo de material.

▪ **reglas empíricas no-proporcionales.** Los más hábiles entre los antiguos constructores se dieron cuenta de este fenómeno y, en consecuencia, formularon **reglas empíricas no-proporcionales** (aritméticas) para los casos citados más arriba. La aplicación de estas reglas al caso del diseño de los arcos de los puentes está bien documentada. Aparecen (o quizá reaparecen) en el siglo XVIII y se desarrollan y utilizan hasta los comienzos del siglo XX. En los otros dos casos, contrafuertes góticos y torres, el único conjunto de reglas de este tipo que ha llegado hasta nosotros es el de Rodrigo Gil de Hontañón.

▪ **reglas de Rodrigo Gil de Hontañón.** El conjunto de reglas de Rodrigo Gil es completo y permite dimensionar los elementos estructurales fundamentales de una iglesia salón gótica (contrafuertes, claves, nervios y torres). La verificación de estas reglas con la ayuda del moderno análisis a rotura da una coincidencia sorprendentemente buena con los resultados del cálculo. Las reglas son proporcionales cuando deben serlo, nervios, y no-proporcionales en los otros casos. Las reglas de Rodrigo Gil constituyen un hito excepcional en la historia "pre-científica" del análisis estructural.

CONCLUSIONES

▪ **empleo de modelos.** El empleo de reglas empíricas no es la única manera de afrontar el problema: el análisis a rotura da también carta de validez al empleo de modelos a escala. La evidencia de la existencia de este tipo de modelos es abundante, pero no existe una prueba documental que confirme que se empleaban con fines estructurales (aunque muy probablemente esto era así). Por supuesto, los edificios existentes, pueden considerarse modelos a escala de una versión futura de mayor tamaño.

▪ **formas válidas, reglas empíricas y el desarrollo de la teoría de bóvedas.** Aunque la actitud de los fundadores de la teoría de bóvedas hacia las reglas empíricas era muy negativa, el estudio del desarrollo de esta teoría demuestra que las "formas válidas" que se deducen de la propia naturaleza del problema eran conocidas. La evolución del concepto de seguridad en el marco de esta teoría, creemos, prueba esta afirmación.

▪ **comprobación visual.** Por último, es preciso enfatizar la posibilidad de realizar, a partir de un dibujo a escala, una **comprobación visual** de la estabilidad de un arco, bóveda o contrafuerte. En una actividad donde el dibujo es el medio más importante de expresión y transmisión del conocimiento, este hecho no debe ser infravalorado. Además, un dibujo a escala de una forma estable constituye también una **regla proporcional**.

La presente Tesis en modo alguno agota el tema de estudio. El estudio de la, más que probable, existencia de estas reglas en la antigüedad (Bizancio en particular) está todavía por hacer. Los manuscritos del gótico tardío deben ser inventariados y analizados en búsqueda de estas reglas y de un mayor

conocimiento sobre la práctica constructiva. El posible empleo de modelos con fines estructurales desde la antigüedad hasta nuestro días requiere así mismo revisión. Sin duda, la realización de estudios de este tipo, dentro del marco de la Historia de la Construcción, llevará a un mayor conocimiento sobre el origen y grado de difusión de estas reglas, y a una mejor comprensión de la forma de edificar y de las obras de los antiguos constructores.

Apéndice

APENDICE

Resumen del desarrollo histórico del concepto de seguridad en el diseño de arcos de fábrica.

El problema del concepto de seguridad en el diseño de las bóvedas de fábrica tiene cierto interés, pues, creemos, es un claro ejemplo, de cómo en el desarrollo de la teoría de las bóvedas y arcos de fábrica la teoría ha ido, en cierto modo, por detrás de la experiencia. Como hemos visto, la propia naturaleza del problema conduce a proporciones y formas válidas que fueron asimiladas por experiencia y "registradas" en forma de reglas empíricas. Estas formas válidas, estaban en la mente de los fundadores del análisis estructural de los arcos y, como veremos, eran un punto de referencia cuando menos intuitivo a la hora de establecer la seguridad de los arcos y bóvedas de fábrica.

La primera formulación sobre la estabilidad de un arco la formuló con sorprendente precocidad Gregory¹. La Hire en su histórica memoria de 1712² no hace mención de este problema. Basándose en la hipótesis, errónea, de la cuña establece situaciones de 'equilibrio estricto', pero no parece preocupado por la inminencia del colapso. Sin duda La Hire sabía que sus hipótesis conducían a un sobredimensionamiento de los contrafuertes.

Bélibidor, principal difusor del método de La Hire, sí se plantea el problema. En su primera contribución de 1725³, la primera aplicación conocida de la ciencia de las estructuras a casos concretos⁴, Bélibidor lo primero que

1. Véase, Introducción, pág. 2, nota 6.

2. P. La Hire, "Sur la construction des voûtes dans les édifices." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, , 1712. pp. 70-78, 3 figs.

3. B. F. Belidor, *Nouveau cours de Mathématique a l'Usage de l'Artillerie et du Génie où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la Théorie et à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre*. Paris: Chez Charles-Antoine Jombert, 1725. Libro II.

4. Habitualmente se toma como fecha del nacimiento de la ciencia de las estructuras el año de 1742 cuando los tres matemáticos realizaron el informe de la cúpula de San Pedro. Las aplicaciones de Bélibidor y Frézier del método de La Hire son bastante anteriores.

APENDICE

hace es comparar los resultados de la aplicación del método de La Hire con las fórmulas empíricas de Vauban. El propio Bélidor reconoce en su tratado de 1729⁵ que las hipótesis de juntas infinitamente lisas y el consiguiente colapso por deslizamiento van a favor de seguridad:

Considérant le voussoir supérieur... comme n'ayant aucune liaison avec le reste de la maçonnerie, la poussée qui se fera à l'égard du point d'appui... sera la plus grande qu'il est possible, puisque dans une voûte, il n'arrive jamais que les voussoirs agissent aussi puissamment... sans trouver d'obstacle de la part du mortier, ni du frottement.

Recomienda entonces, sencillamente, aumentar ligeramente el espesor, si bien no indica en que medida:

Par consequence, si l'on cherche à proportionner la résistance du piédroit... a cette plus grand poussée, on donnera à la puissance *résistante* une force un peu au au-dessus de celle qu'il faudroit effectivement pour soutenir l'effort du voussoir... Ainsi cette supposition ne pouvant que contribuer à la fermeté des piédroits, il s'ensuit que considérer ici les choses dans le rigueur de la théorie, c'est leur donner tout l'avantage qu'on peut desirer dans la pratique.

A pesar de esta indeterminación los resultados de la aplicación del método daban buenos resultados, a favor de seguridad, al comparar con edificaciones existentes, y, con ligeras modificaciones, el método fue adoptado por Perronet a la hora de elaborar unas tablas para uso de los ingenieros franceses⁸.

El primero en plantear el problema de forma moderna y en sugerir la aplicación de un coeficiente de seguridad geométrico, fue Couplet. En su segunda memoria de 1730⁹, busca las proporciones de colapso de arcos y con-

5. B. F. Belidor, *La science des ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et architecture civile*. Paris: 1729.

6. Belidor, op. cit., Livre II, pág. 11.

7. *Ibidem*.

8. J. R. Perronet y Chezy "Formule générale pour déterminer l'épaisseur des piles et culées des arches des ponts, soit qu'elles soient en plein cintre ou surbaissées." *Recueil de divers mémoires extraits de la bibliothèque impériale des ponts et chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs*, editado por P. Lesage. Paris: Chez Firmin Didot, 1810. Vol.2, pp. 243-273, lám. XVII.

9. P. Couplet, "De la poussée des voûtes." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, , 1729. pp. 79-117, lám. 4-7.

trafuertes, en la hipótesis correcta de imposibilidad de deslizamiento de las dovelas (aunque fijando el ángulo de rotura en 45°). A continuación advierte sobre la necesidad de incrementar los espesores para obtener una cierta seguridad, si bien sólo tiene en cuenta la resistencia del material:

... Cependant il faut bien se garder de donner à une Voûte... une épaisseur qui soit comme nous le venons de trouver ... car les charnières ou points d'appui des Voussoirs se trouveroient dans les surfaces de la Voûte, en sorte que ces Voussoirs qui porteroient sur leurs arrêtes, écraseroient bien-tôt ces Arrêtes, et par conséquent la Voûte périrait, ou changeroit de figure, c'est pourquoi il faut au moins doubler l'épaisseur que la formule nous donne...

Sin embargo, esta condición le parece insuficiente y, a continuación, formula la 'condición del tercio' por primera vez:

Ainsi pour que l'épaisseur résultante de nôtre formule ... soit au milieu de l'épaisseur, il faudroit tripler cette épaisseur...

Las observaciones de Couplet sobre cómo establecer una seguridad suficiente con respecto al colapso pasaron inadvertidas.

La siguiente contribución donde se plantea de manera explícita el problema es la de Audoy¹². En su memoria aplica la importantísima, y olvidada hasta entonces, teoría de Coulomb¹³. Emplea un enfoque a rotura clásico: se trata de buscar las proporciones de colapso de una bóveda, situada sobre sus arranques o sobre contrafuertes, y, luego, establecer una cierta seguridad con respecto a esta situación. Audoy era consciente, sin duda por comparación de los resultados obtenidos con las proporciones más habituales establecidas por la experiencia, de que las configuraciones de colapso obtenidas eran

10. Couplet, op. cit., pág. 132.

11. Couplet, op. cit., pág. 132.

12. Audoy "Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau." *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 4, 1820. pp. 1-96, láms. I-VI.

13. C. A. Coulomb, "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture." *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées (Paris)*, Vol. 7, 1773. pp. 343-382.

APENDICE

'reales' (la bóveda estaba ciertamente en equilibrio inestable) a diferencia de las obtenidas por el método de La Hire:

... la voûte en équilibre, telle que nous l'avons considéré d'après l'expérience, ne formerait jamais qu'un assemblage de quatre quartiers de maçonnerie mis en balance sur leurs arêtes; système précaire, qui ne résisterait pas aux accidens multipliés que le temps peut amener: en sorte qu'il ne suffit pas ... de donner aux pieds-droits les épaisseurs indiqués par nos formules; il faut augmenter ces épaisseurs.

El problema de cuánto hay que sobredimensionar estos espesores le parece irresoluble por la sola teoría. Es preciso recurrir a la experiencia y comparar las formas límite con las existentes, con vistas a deducir unos principios válidos:

Ce que l'ingénieur a mieux à faire, c'est de consulter l'expérience: lorsqu'il verra qu'une voûte, d'une espèce donnée, se soutient depuis un grand nombre d'années, depuis un siècle par exemple, c'est que cette voûte a des dimensions au moins suffisantes; car il est probable que, pendant ce laps de temps, elle a dû éprouver tous les accidens qui peuvent lui arriver. Alors les formules lui enseigneront à calculer l'excès de stabilité de cette voûte sur le simple état d'équilibre, et, par suite, le moyen de donner à toute autre voûte de même genre le même surcroît de force. On conçoit qu'on pourrait ainsi, par des observations multipliées et judicieusement comparées à l'aide de la théorie, parvenir à connaître les moindres épaisseurs qu'il est permis de donner aux supports des édifices voûtés, pour lesquels on suit encore une pratique vague, qui varie suivant les calculs ou la timidité de chaque constructeur.

En lugar de realizar esta tarea, que evidentemente sería larga y penosa, decide utilizar como punto de referencia los resultados del método de La Hire que considera suficientemente probados por la experiencia:

Il paraît cependant que la méthode de Lahire avait obtenu plus de confiance que les autres... Comme elle a donné des épaisseurs éprouvées déjà par le temps, il convient de la comparer à notre théorie.

El procedimiento consiste en encontrar un 'coeficiente de mayoración' del empuje de forma que con este empuje mayorado obtengamos un espesor de contrafuerte igual al obtenido por el método de La Hire. Este coeficiente depende del tipo de bóveda y está comprendido entre 1.5 y 2. Evidentemente, "para este viaje no hacían falta estas alforjas", y hubiera sido más lógico,

14. Audoy, op. cit., pág. 77.

15. *Ibidem*.

16. Audoy, op. cit., pág. 78.

desde un punto de vista puramente práctico (desde el punto de vista del desarrollo teórico la Memoria de Audoy es de gran importancia), seguir utilizando el método de La Hire que conduce a cálculos más sencillos. Esto no pasó desapercibido y el método siguió apareciendo en algunos manuales de construcción hasta pasada la mitad del siglo XIX¹⁷.

Aunque el término de comparación (la estabilidad obtenida mediante una hipótesis que se considera falsa) pueda parecer discutible, el procedimiento de obtener seguridad mayorando el empuje en la clave, se siguió empleando durante algún tiempo.¹⁸

La solución al problema apareció de forma inesperada. Navier en su *Resumé des leçons...*¹⁹, en una discusión sobre las verificaciones a posteriori del estado tensional en las juntas, establece la conocida 'regla del tercio': para que no aparezcan tracciones es preciso que la resultante no pase a una distancia inferior al tercio del canto del borde más comprimido. La regla, aunque tiene su origen en consideraciones elásticas, enmascara en realidad, como hemos visto en el apartado 8.2, una condición de seguridad a colapso que es la determinante en este tipo de estructuras.

Este criterio fue adoptado como punto de partida para el diseño de bóvedas por primera vez por el ingeniero francés Carvallo en un trabajo que

17. Véase Introducción, pág. 3, nota 14.

18. Véase por ejemplo: Petit "Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires." *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 12, 1835. pp. 73-150; Garidel "Mémoire sur le calcul des voûtes en berceau." *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 12, 1835. pp. 7-72, lám.I; Michon "Tables et formules pratiques pour l'établissement des voûtes cylindriques." *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 15, 1848. pp. 7-117, lám.I

19. L. M. H. Navier, *Resumé des Leçons donnés à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines*. Bruselas: De Mortier, 1839. pp. 166-170. "Des Pressions exercés contre les plans de joint dans les voûtes en berceau."

APENDICE

tuvo gran difusión²⁰. La regla del tercio se convirtió en punto de partida para el diseño y comprobación de bóvedas en la segunda mitad del siglo XIX²¹ y comienzos del XX²².

20. Carvallo "Étude sur la stabilité des voûtes." *Annales des Ponts et Chaussées*, Vol. 1, 1853, 2e. sem., pp. 1-77. La memoria tuvo una gran aceptación; recibió una revisión muy elogiosa de Poncelet "Rapport sur un Mémoire de M. J. Carvallo, intitulé: Étude sur la stabilité des voûtes." *Comptes rendues de l'Académie des Sciences (Paris)*, Vol. 35, nº 18, 1852 2eme semestre. pp. 636-647, y fue traducida inmediatamente al alemán por H. Tellkamp *Beitrag zur Gewölbetheorie*. Hannover: 1855.

21. Rankine formula esta condición en forma de Teorema: "The stability of an arch is secure, if a linear arch [línea de empujes], balanced under the forces which act on the real arch, can be drawn within the middle third of the depth of the arch-ring." W. J. M. Rankine, *A Manual of Applied Mechanics*. 3a. Ed. London: Charles Griffin and Company, 1864, pág. 258.

22. Véase por ejemplo: E. H. Sprague *The Stability of Arches*. London: Scott, Greenwood and Son, 1916; y P. Sejourné, P. *Grandes Voûtes*. Bourges: Imprimerie Vve Tardy-Pigelet et Fils, 1913-1916, 6 Vols.